



Serviço Público Federal
Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Faculdade de Estatística
Curso de Graduação em Estatística

José Gracildo de Carvalho Júnior

Análise de Regressão e Correlação

Código: EST 2020

<https://doi.org/10.5281/zenodo.20514217>

Belém/PA
2026

Plano de Ensino

1.1. Ementa

Revisão de resultados importantes sobre matrizes. Regressão linear simples. Modelos de regressão linear múltipla. Análise de resíduos. Autocorrelação. Heteroscedasticidade. Multicolinearidade. Variáveis *Dummy*. Transformação de variáveis: modelo Box-Cox. Seleção de Modelos.

1.2. Conteúdo Programático

1.2.1. Revisão de Resultados Importantes sobre Matrizes

Apresentar e definir conceitos básicos sobre matrizes, além disso, definir, apresentar exemplos e aplicações sobre operações entre matrizes: soma, produto, diferença, potência, transposta e inversa.

1.2.2. Diagrama de Dispersão e Coeficiente de Correlação Linear de Pearson

Construção e interpretação de diagramas de dispersão para 2 (duas) ou “ n ” variáveis aleatórias; cálculo do coeficiente de correlação linear simples de Pearson como procedimento fundamental para relacionar duas características observáveis mediante definições estatísticas; formulação das hipóteses no teste de significância estatística para a correlação linear simples de Pearson; interpretação e análise estatística do teste da correlação linear simples de Pearson; utilização de *Software* para realizar o cálculo e testes de significância estatística da correlação linear simples de Pearson.

1.2.3. Modelo de Regressão Linear Simples

Classificação e definição dos tipos de variáveis aleatórias num modelo de regressão linear simples; utilização dos métodos de estimação paramétrica pontual de mínimos quadrados e do método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros de um modelo de regressão linear simples; apresentar testes estatísticos de significância aplicados aos parâmetros do modelo de regressão estimado; coeficiente de explicação do modelo de regressão ajustado; teste global de significância estatística num modelo de regressão linear simples ajustado, segundo a análise de variância (ANOVA); diagnóstico ou análise dos resíduos (erros) de um modelo de regressão estimado; demonstrar a utilização de *Software* para realização do ajuste de um modelo de regressão linear simples e para aplicação de testes de significância estatística aos parâmetros do modelo de regressão estimado; exemplos e aplicações em dados reais e em dados de simulação.

1.2.4. Modelo de Regressão Linear Múltipla

Classificação e definição dos tipos de variáveis aleatórias num modelo de regressão linear múltipla; utilização dos métodos de estimação paramétrica pontual de mínimos quadrados e do método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros de um modelo de regressão linear múltipla; apresentar testes estatísticos de significância aplicados aos parâmetros do modelo de regressão múltipla estimado; coeficiente de explicação simples e ajustado para o modelo de regressão linear múltipla estimado; teste global de significância estatística num modelo de regressão linear múltipla ajustado, segundo a análise de variância (ANOVA); diagnóstico ou análise dos resíduos (erros) de um modelo de regressão múltipla estimado; demonstrar a utilização de *Software* na realização do ajuste de um modelo de regressão linear múltipla e para aplicação de testes de significância estatística aos parâmetros do modelo de regressão múltipla estimado; exemplos e aplicações em dados reais e dados simulados.

1.2.5. Autocorrelação, Heterocedasticidade e Multicolinearidade

Definição estatística e caracterizações de ocorrência para Autocorrelação, Heterocedasticidade e Multicolinearidade; consequências da Autocorrelação para um modelo de regressão linear; implicações e efeitos da Heterocedasticidade sobre um modelo de regressão linear; principais aspectos e soluções quanto a Multicolinearidade identificada em um modelo de regressão linear; utilização de *Softwares* para realização de aplicações em dados reais e em dados simulados com o objetivo de avaliar possível Autocorrelação, Heterocedasticidade e Multicolinearidade em modelos de regressão linear.

1.2.6. Variáveis Dummy

Definir uma variável dummy; apresentar exemplos e aplicações de variáveis dummy dentro da metodologia de análise de regressão e correlação; realizar a aplicação de variável dummy mediante *Software* com dados reais e com dados simulados no estudo de análise de regressão e correlação.

1.2.7. Transformação de Variável do Modelo de Regressão Linear via método Box-Cox

Caracterizar em quais condições ao utilizar os modelos de análise de regressão e correlação é necessário realizar uma transformação na variável dependente deste modelo; apresentar quais os tipos de transformação para variável dependente do modelo de regressão linear são mais utilizadas e, como se deve interpretar o resultado obtido após essa transformação; discutir os resultados esperados para o modelo de regressão linear simples e modelo de regressão linear múltipla após a transformação da variável dependente; apresentar um *Software* capaz de transformar e gerar resultados “ótimos/otimizados” para a análise da transformação de uma variável aleatória dependente em modelos de regressão linear simples e, em modelos de regressão linear múltipla, mediante dados reais e dados fruto de simulação.

1.2.8. Seleção de Modelos

Avaliar segundo critérios estatísticos como diagnóstico do modelo, menor erro de previsão, previsões dentro de um intervalo de confiança e princípio da parcimônia, qual é o melhor modelos de regressão linear para prever uma determinada característica numérica de interesse; discutir mediante a utilização de *Software* qual é o melhor modelo de regressão linear simples a partir de pelo menos duas opções disponíveis, mediante utilização de dados reais e dados simulados.

1.3. Objetivo Geral

Apresentar ao(a) discente noções básicas de análise de dados onde uma variável é função de uma ou várias variáveis, por meio de Métodos de Mínimos Quadrados e/ou Máxima verossimilhança.

1.3.1. Objetivos Específicos

- (a) Dar subsídios para que os(as) discentes desenvolvam a capacidade de analisar e interpretar modelos de regressão e correlação, além de realizar previsões mediante tais modelos.
- (b) Ajudar a desenvolver nos(as) discentes a capacidade crítica de compreender cada etapa do processo de modelagem de regressão, sabendo justificar a utilização dos métodos e chegar em conclusões a partir dos resultados e previsões.

1.4. Competências e Habilidades

1.4.1. Competências:

Apresentar argumentos estatísticos para fazer afirmações, gerando possíveis conclusões sobre as características dos fenômenos analisados, diante de informações obtidas mediante levantamento de dados, assim como, a partir de realização de experimentos aleatórios. Apresentar exemplos de fenômenos estatísticos reais, teóricos e simulados gerando tomadas de decisões.

1.4.2. Habilidades:

Desenvolver em conjunto com a(o) discente uma metodologia integrada de ensino, apresentando exemplos práticos de seu cotidiano onde a teoria ministrada é inteiramente aplicável, tentando assim despertar o interesse e melhor compreensão dos conhecimentos abordados, mediante a interpretação e exposição dos assuntos mencionados para uma melhor fixação do conteúdo programático.

1.5. Atividades e Ferramentas de Execução do Conteúdo Programático

1.5.1. Executar as atividades síncronas dentro do tempo estipulado para a aula, e as atividades assíncronas durante o tempo não compreendido pelas aulas remotas.

1.5.2. Os recursos a serem adotados nesta disciplina são: notas de aula fornecidas previamente; bibliografias indicadas; *softwares* específicos para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem de forma remota, tais como, o *Google Meeting* e *Google Classroom*.

1.6. Método de Avaliação no Processo de Ensino e Aprendizagem

1.6.1. Realizar avaliações de forma síncrona ao final de cada capítulo do conteúdo programático ministrado mediante exemplos e listas de exercícios.

1.6.2. Realizar avaliações de forma assíncrona ao final de cada capítulo do conteúdo programático ministrado mediante listas de exercícios.

1.6.3. O Cálculo da Nota Final e Conceito da Disciplina Processos Estocásticos será determinado pela Equação (0.1) mediante os parâmetros:

- a) Média aritmética simples em relação às notas obtidas nos itens 6.1 e 6.2.
- b) Participação e interação durante as atividades realizadas em sala de aula e de forma assíncrona.
- c) Frequência durante as atividades realizadas em sala de aula e de forma assíncrona.

$$\text{Nota Final} = \frac{(NA)_1 + (NA)_2 + (NA)_3 + (NA)_4}{4} \quad (0.1)$$

onde, $(NA)_i$ representa a Nota na i -ésima Avaliação, tal que, $i = 1; 2; 3; 4$. O termo denominado $NA = \text{Nota da Prova Escrita} + \text{Nota da Lista de Exercícios}$. A frequência discente às aulas presenciais é definida pelo Regimento Geral da UFPA (<https://portal.ufpa.br/images/docs/regimento>). *

1.7. Cronograma

1.7.1. No período de 24/03/2026 a 24/04/2026, realizar atividades presenciais e assíncronas correspondentes à primeira avaliação sobre o tema: Revisão de resultados importantes sobre matrizes.

1.7.2. No período de 25/04/2026 a 29/05/2026, realizar atividades presenciais e assíncronas correspondentes à segunda avaliação sobre o tema: Regressão linear simples.

1.7.3. No período de 30/05/2026 a 30/06/2026, realizar atividades presenciais e assíncronas correspondentes à terceira avaliação sobre o tema: Modelos de regressão linear múltipla.

1.7.4. No período de 01/07/2026 a 23/07/2026, realizar atividades presenciais e assíncronas correspondentes à quarta avaliação sobre os temas: Autocorrelação; Heteroscedasticidade; Multicolinearidade; Variáveis Dummy; Transformação de variável pelo método Box-Cox; Seleção de Modelos.

* Torres, R.M., Liu, P.M.F. Guia prático para uso de plataformas virtuais no ensino remoto, Belo Horizonte: Faculdade de Medicina, UFMG, 2020 (<https://www.nescon.medicina.ufmg.br/biblioteca/imagem/E-book-Guia-pratico-plataformas-virtuais-3.pdf>).

1.8. Bibliografia

1.8.1. Bibliografia Básica

BARBETTA, P. A; REIS, M. M; BORNIA, A. C. Estatística para Cursos de Engenharia, Computação e Ciência de Dados. Rio de Janeiro: LTC, 2024. Ebook. ISBN 9788521638827. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521638827>

MONTGOMERY, D. C; PECK, E. A; VINING, G. G. Introduction to linear regression analysis. 6th ed. Hoboken, N.J.: Wiley, 2021.

PIANEZZER, G. A. Regressões estatísticas: definição, métodos e aplicação prática. 1ª ed., Curitiba: InterSaberes, 2025.

1.8.2. Bibliografia Complementar

CARVALHO Jr. J. G. Gráfico de Controle de Regressão Estrutural, Dissertação de Mestrado: UFPA, Belém, 2006.

BUSSAB, W. O., MORETTIN, P. A. Estatística Básica. 10ª ed., São Paulo: Saraiva Uni, 2024.

COLOSIMO, E. A. Estatística II: Correlação e Regressão Linear Simples. Departamento de Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: https://www.est.ufmg.br/ênicoc/pdf/EstatisticaII/aula9-10_corr-reg.pdf. Acesso em 24/04/2026.

CHARNET, R; FREIRE, C. A. L; CHARNET, E. M. R; BONVINO, H. Análise de modelos de regressão linear com aplicações. São Paulo: Editora Unicamp, 2008.

DRAPER, N. R., SMITH, H., Applied Regression Analysis, 2a. ed., New York: John Wiley, 1998.

HOFFMANN, R. Análise de regressão: uma introdução à econometria [recurso eletrônico] / Rodolfo Hoffmann. - - Piracicaba: ESALQ/USP, 2015. Disponível em: <https://repositorio.usp.br/bitstream/handle/BDPI/48616/REGRESS.pdf?sequence>. Acesso em 19/05/2026.

KUTNER, M. H; NACHTSHEIM, C. J; NETER, J; LI, W. Applied linear statistical models. 5. ed. India: McGraw-Hill, 2013.

NETER, J., WASSERMAN, W. e KUTNER, M. H. Applied linear regression models, Richard D. Irwin Inc, Homewood, Illinois, 1983.

Nota 1. Atividade Síncrona:

Possibilitam a interação simultânea entre participantes, que se encontram em espaços físicos diferentes, mas conectados, via internet, a um mesmo ambiente virtual, para o estudo de conteúdos diversos e demais atividades de ensino-aprendizagem[†].

Nota 2. Atividade Assíncrona:

Podem ser realizadas por meio de ferramentas digitais e outras estratégias de interação não digital, que possibilitem a comunicação não simultânea, entre participantes que se encontram em espaços físicos diferentes, dentro de um prazo pré-estabelecido[†].

[†] Torres, R.M., Liu, P.M.F. Guia prático para uso de plataformas virtuais no ensino remoto, Belo Horizonte: Faculdade de Medicina, UFMG, 2020 (<https://www.nescon.medicina.ufmg.br/biblioteca/imagem/E-book-Guia-pratico-plataformas-virtuais-3.pdf>)

Sumário

Plano de Ensino	ii
1 Revisão sobre Resultados Importantes de Matrizes	3
1.1 - Matriz Quadrada, Matriz Coluna, Matriz Linha	3
1.2 - Matriz Identidade, Matriz Diagonal e Matriz Nula	3
1.3 - Matriz Triangular, Matriz Transposta	4
1.4 - Igualdade, Soma, Diferença e Produto entre Matrizes	5
1.5 - Determinante de uma Matriz	10
1.5.1 - Determinante da Matriz de Ordem 1:	10
1.5.2 - O Menor Complementar de uma Matriz:	10
1.5.3 - Cofator Matricial e Matriz Adjunta:	12
1.5.4 - Determinante da Matriz de Ordem 2:	13
1.5.5 - Determinante da Matriz de Ordem 3:	14
1.5.6 - Determinante de Matriz de Ordem 4:	20
1.6 - Matriz Inversa:	23
1.7 - Lista de Exercícios	26
1.8 - Operações Matriciais em Análise de Regressão e Correlação	28
1.8.1 - Estimação dos Parâmetros do Modelo de Regressão Linear Simples	28
1.9 - Exercício com Aplicação em Dados Reais	30
2 Diagrama de Dispersão e Coeficiente de Correlação Linear de Pearson	33
2.1 - Introdução	33
2.2 - Relação de Causa e Efeito entre Variáveis Aleatórias	33
2.3 - Diagrama de Dispersão	34
2.4 - Coeficiente de Correlação Linear Simples de Pearson	38
2.5 - Teste de Hipóteses do Coeficiente de Correlação Linear Simples de Pearson	40
2.6 - Conclusão	42
2.7 - Lista de Exercícios	43
2.8 - Tabela da Função Densidade de Probabilidade <i>t-Student</i>	45
3 Análise de Regressão Linear Simples	46
3.1 - Introdução	46
3.2 - Modelo de Regressão Linear Simples	46
3.3 - Estimador Paramétrico do Modelo de Regressão Linear Simples	48
3.3.1 - Método de Mínimos Quadrados para Estimar Parâmetros na Regressão	49
3.3.2 - Método de Máxima Verossimilhança para Estimar Parâmetros na Regressão	51
3.3.3 - Método Matricial para Estimção dos Parâmetros de Regressão	56

3.4 - Teste de Hipóteses dos Parâmetros do Modelo de Regressão Linear Simples	60
3.5 - Análise de Variância (ANOVA) do Modelo de Regressão Linear Simples	63
3.6 - Coeficiente de Explicação ou Determinação	64
3.7 Análise dos Resíduos do Modelo de Regressão	65
3.7.1 - Resíduos Autocorrelacionados: Teste Estatístico de Durbin-Watson	67
3.8 - Lista de Exercícios	70
3.9 - Tabela da Distribuição <i>t</i> -Student e Tabelas de Durbin-Watson	76
3.9.1 - Tabela da Função Densidade de Probabilidade <i>t</i> -Student	76
3.9.2 - Tabelas da Estatística de Teste <i>d</i> de <i>Durbin-Watson</i>	77
Bibliografia	80

Capítulo 1

Revisão sobre Resultados Importantes de Matrizes

1.1 - Matriz Quadrada, Matriz Coluna, Matriz Linha

Definição 1.1.1. Seja uma matriz qualquer onde há número de linhas “ m ” e número de colunas “ n ”, a matriz $A = [a_{ij}]$, para todo, $1 \leq i \leq m$, e $1 \leq j \leq n$, onde, a_{ij} representa um elemento de A localizado na linha “ i ” e coluna “ j ”, respectivamente. Então, se pode garantir as seguintes implicações:

- a. Caso $m \geq 2$ e $n \geq 2$, tal que, $m = n$, a matriz é classificada como **matriz quadrada** de ordem $m \times n$ (se lê: m por n), como nos exemplos apresentados na Equação (1.1).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \quad \dots \quad (1.1)$$

- b. Para $m \geq 2$ e $n = 1$, a matriz é classificada como **matriz coluna** de ordem $m \times 1$ (se lê: m por 1), tal como, pode ser visto nos exemplos da Equação (1.2).

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}_{(2 \times 1)} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} \quad \dots \quad (1.2)$$

- c. Se $m = 1$ e $n \geq 2$, a matriz é classificada como **matriz linha** de ordem $1 \times n$ (se lê: 1 por n), como pode ser observado nos exemplos da Equação (1.3).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}_{(1 \times 2)} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}_{(1 \times 3)} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}_{(1 \times 4)} \quad \dots \quad (1.3)$$

1.2 - Matriz Identidade, Matriz Diagonal e Matriz Nula

Definição 1.2.1. Supondo que $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada e, para $i = j$, se tem que os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{mn}$, são todos iguais a 1 (um) e, quando $i \neq j$, o valor é igual à zero, para todo, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se tem então, uma **matriz identidade**, que é quando todos os elementos na diagonal principal são iguais à 1 e, fora desta diagonal principal os elementos são iguais à zero.

Adicionalmente, a matriz identidade também é denominada de **matriz diagonal**. Então, a matriz A é classificada como matriz identidade quando for igual aos exemplos da Equação 1.4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \quad \dots \quad (1.4)$$

Definição 1.2.2. Supondo que $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada, tal que, todos os elementos de A são iguais à zero, para todo, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Então, a matriz A é classificada como **matriz nula** e pode ser representada como nos exemplos propostos na Equação (1.5).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \quad \dots \quad (1.5)$$

1.3 - Matriz Triangular, Matriz Transposta

Definição 1.3.1. Supondo que $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada e, para $i = j$, se tem que os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, pelo menos um deles é diferente de 1 (um) e, quando $i \neq j$, o valor da matriz é igual à zero, acima ou abaixo da diagonal principal, neste caso, haverá uma **matriz triangular superior**, se os zeros estiverem abaixo da diagonal principal ($a_{ij} = 0$, para $i > j$) e, **matriz triangular inferior**, se os zeros estiverem acima da diagonal principal ($a_{ij} = 0$, para $i < j$). Logo, uma matriz A é classificada como matriz triangular quando for igual aos exemplos apresentados na Equação 1.6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \quad \dots \quad (1.6)$$

Definição 1.3.2. Supondo que $A_{(m \times n)} = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada, onde “ m ” é número de linhas e “ n ” é o número de colunas de A , para todo, $1 \leq i \leq m$, e $1 \leq j \leq n$. Todavia, caso a matriz A tenha sua ordem $m \times n$, ou sela, quando a ordem de linhas e colunas são invertidas, então, se tem a **matriz transposta** de A , que é dada por A^T de ordem $n \times m$, ou seja, $A^T_{(n \times m)}$ como pode se comprovado nos exemplos das Equações (1.7 e 1.8).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}_{(4 \times 3)} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 4)} \quad (1.7)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{(3 \times 5)} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{(5 \times 3)} \quad (1.8)$$

1.4 - Igualdade, Soma, Diferença e Produto entre Matrizes

Definição 1.4.1. [Gomes, (2018)] **Igualdade de matrizes:** Sejam duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, estas serão ditas iguais, se somente se, tiverem o mesmo número de linhas (m) e colunas (n), $a_{ij} = b_{ij}$, para todo, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 1.4.1. Matrizes consideradas iguais entre si.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{(3 \times 2)} = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{(3 \times 2)} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

Exemplo 1.4.2. Matrizes consideradas diferentes entre si.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{(3 \times 2)} \neq B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}_{(3 \times 2)} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \neq B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

Definição 1.4.2. [Gomes, (2018)] **Soma de matrizes:** Sejam duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, existirá a soma $A + B$, se somente se, as duas matrizes tiverem o mesmo número de linhas (m) e colunas (n), quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, resultando numa matriz onde $A + B = C = [c_{ij}]$, de ordem $m \times n$ (lê-se: m por n), tal como, se pode verificar na Equação (1.9).

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{(m \times n)} + B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{(m \times n)} \\ \Rightarrow (A + B) = C &= \begin{bmatrix} c_{11} = a_{11} + b_{11} & \cdots & c_{1n} = a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} = a_{m1} + b_{m1} & \cdots & c_{mn} = a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}_{(m \times n)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Exemplo 1.4.3. Sejam as matrizes A e B dadas a seguir, realizar a operação de soma entre as mesmas apresentando a matriz resultante $C = A + B$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \Rightarrow A + B = C = \begin{bmatrix} (0 + 2) & (1 + 5) \\ (2 + 3) & (3 + 7) \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

Definição 1.4.3. [Gomes, (2018)] **Subtração ou Diferença entre matrizes:** Sejam duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, existirá a soma $A - B$, se e somente se, as duas matrizes tiverem o mesmo número de linhas (m) e colunas (n), quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, resultando numa matriz onde $A - B = C = [c_{ij}]$, de ordem $m \times n$ (lê-se: m por n), tal como, se pode verificar na Equação (1.10).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{(m \times n)} - B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{(m \times n)}$$

$$\Rightarrow A - B = C = \begin{bmatrix} c_{11} = a_{11} - b_{11} & \cdots & c_{1n} = a_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} = a_{m1} - b_{m1} & \cdots & c_{mn} = a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad (1.10)$$

Exemplo 1.4.4. Sejam as matrizes A e B dadas a seguir, realizar a operação de soma entre as mesmas apresentando a matriz resultante $C = A - B$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} - B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \Rightarrow (A - B) = C = \begin{bmatrix} (0 - 2) & (1 - 5) \\ (2 - 3) & (3 - 7) \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

Definição 1.4.4. [Gomes, (2018)] **Matriz multiplicada por um escalar:** Seja a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem m por n e “ c ” um escalar real (constante), o produto entre $c \times A$ resultará numa matriz $B = [b_{ij}]$, de ordem m por n , tal que $b_{ij} = c \times a_{ij}$, para todo, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, como, é possível observar na Equação (1.11).

$$c \times A = c \times \begin{bmatrix} (a_{11}) & \cdots & (a_{1n}) \\ (a_{21}) & \cdots & (a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{m1}) & \cdots & (a_{mn}) \end{bmatrix}_{(m \times n)} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} c \times (a_{11}) & \cdots & c \times (a_{1n}) \\ c \times (a_{21}) & \cdots & c \times (a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c \times (a_{m1}) & \cdots & c \times (a_{mn}) \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad (1.11)$$

Exemplo 1.4.5. Dada a matriz A apresentada a seguir e um escalar $c = 5$, obter a matriz $B = c \times A$, satisfazendo a condição $b_{ij} = c \times a_{ij}$, para todo, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

$$c \times (A) = 5 \times \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \times (4) & 5 \times (5) & 5 \times (8) \\ 5 \times (2) & 5 \times (3) & 5 \times (7) \\ 5 \times (0) & 5 \times (1) & 5 \times (6) \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 20 & 25 & 40 \\ 10 & 15 & 35 \\ 0 & 5 & 30 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

Definição 1.4.5. [Gomes, (2018)] **Multiplicação de Matriz Vetor Linha por Matriz Vetor Coluna:** Seja A a matriz linha representada pela Equação (1.3) e B a matriz coluna dada pela Equação (1.2). Tanto A quanto B são considerados vetores linha e coluna, respectivamente, onde A possui ordem p (número de colunas) e B também tem ordem p (número de linhas). Essa equivalência no número de colunas de A , em relação ao número de linhas de B é o que permite o produto entre estes vetores, onde resulta que $A \times B = c$, tal que, c é definido na Equação (1.12), para todo, $1 \leq i \leq p$.

$$c = \sum_{k=1}^p a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p. \quad (1.12)$$

Exemplo 1.4.6. Sejam os vetores A e B quando $p = 3$, isto é, mediante dois vetores com 3 (três) coordenadas cada um e apresentados a seguir. Calcular o produto matricial dado por $c = A \times B$.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{(1 \times 3)} \Rightarrow p = 3 \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \Rightarrow p = 3$$

Resolução:

$$c = A \times B = [6 \times 4] + [5 \times (-1)] + [(-2) \times 3] = [24] + [-5] + [-6] = 24 - 5 - 6 = 24 - 11 = \mathbf{13},$$

que pode ser representado segundo o esquema de cálculo do produto vetorial dado pela Figura 1.1.

Figura 1.1 - Esquema de cálculo para um produto matricial entre dois vetores linha e coluna quando $p = 3$, isto é, produto matricial para três coordenadas em cada vetor linha e coluna, respectivamente.

$c = A \times B$	4
	-1
	3
6 5 -2	$= [6 \times 4] + [5 \times (-1)] + [(-2) \times 3]$ $= [24] + [-5] + [-6]$ $= [24] + [-11]$ $= \mathbf{13}$

Desta forma, a matriz C resultante do produto matricial $A \times B$, será igual a,

$$C = [13]_{(1 \times 1)}.$$

Definição 1.4.6. [Gomes, (2018)] **Multiplicação de Matrizes ou Produto Matricial:** Seja A uma matriz de ordem $(m \times p)$, lê-se: m linhas por p colunas e B uma matriz de ordem $(p \times n)$, lê-se: p linhas por n colunas. Nota-se, que a matriz A possui o número de colunas “ p ” igual ao número de linhas “ p ” da matriz B . Essa equivalência no número de colunas de A , em relação ao número de linhas de B permite o produto matricial $A \times B$, resultando na matriz $C = [c_{ij}]$, de ordem $m \times n$, lê-se: m linhas por n colunas e, c_{ij} indica o produto matricial de A com B , na linha i de A e coluna j de B . Em termos gerais, admitindo que A a matriz possui ordem $(m \times p)$ e B é uma matriz de ordem $(p \times n)$, a matriz $C = [c_{ij}] = A \times B$, será calculada segundo o esquema de cálculo apresentado na Figura 1.2.

Figura 1.2 - Esquema de cálculo para realizar um produto matricial entre a matriz A de ordem $m \times p$ e a matriz B de ordem $p \times n$, resultando numa matriz C de ordem $m \times n$.

$c = A_{(m \times p)} \times B_{(p \times n)}$	$\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{matrix}$
$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{11} = [a_{11} \times b_{11}] + \cdots + c_{1n} = [a_{1p} \times b_{p1}] \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} = [a_{m1} \times b_{p1}] + \cdots + c_{mn} = [a_{mp} \times b_{pn}] \end{matrix}$

Nota 1.4.1. O cálculo de c_{ij} apresentado na Figura 1.2, é realizado segundo a Equação (1.12).

Exemplo 1.4.7. [Gomes, (2018)] A partir das matrizes A de ordem 3×2 e B de ordem 2×2 , tal como, são apresentadas a seguir. Calcular o produto matricial dado por $C = c_{ij} = [A = a_{ij}] \times [B = b_{ij}]$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{(3 \times 2)} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

Resolução: Mediante a a Equação (1.12), se pode obter os seguintes resultados.

$$c_{11} = [2 \times 5] + [3 \times 1] = [10] + [3] = \mathbf{13}; \quad c_{12} = [2 \times 6] + [3 \times (-3)] = [12] + [-9] = \mathbf{3};$$

$$c_{21} = [(-1) \times 5] + [4 \times 1] = [-5] + [4] = \mathbf{-1}; \quad c_{22} = [(-1) \times 6] + [4 \times (-3)] = [-6] + [-12] = \mathbf{-18};$$

$$c_{31} = [0 \times 5] + [(-2) \times 1] = [0] + [-2] = \mathbf{-2}; \quad c_{32} = [0 \times 6] + [(-2) \times (-3)] = [0] + [6] = \mathbf{6}.$$

Portanto, a matriz C resultante do produto matricial de $A \times B$ será calculada segundo o esquema de resolução apresentado na Figura 1.3.

$$C = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ -1 & -18 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 2)}$$

Figura 1.3 - Esquema de cálculo para realizar o produto matricial entre a matriz A de ordem 3×2 e a matriz B de ordem 2×2 , resultando numa matriz C de ordem 3×2 .

$c = A_{(3 \times 2)} \times B_{(2 \times 2)}$		5	6
		1	-3
2	3	$[2 \times 5] + [3 \times 1] = 13$	$[2 \times 6] + [3 \times (-3)] = 3$
-1	4	$[(-1) \times 5] + [4 \times 1] = -1$	$[(-1) \times 6] + [4 \times (-3)] = -18$
0	-2	$[0 \times (5)] + [(-2) \times 1] = -2$	$[0 \times 6] + [(-2) \times (-3)] = 6$

Exercício 1.4.1. [Gomes, (2018)] A partir da matriz X de ordem 3×3 e matriz Y de ordem 3×1 , tal como, são apresentadas a seguir. Encontrar os valores dos coeficientes α , β_1 e β_2 , resolvendo o sistema de equações resultantes do produto matricial realizado entre $X \times Y$.

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}_{(3 \times 1)}$$

Exercício 1.4.2. [Gomes, (2018)] Mediante as matrizes $A; B; C; D; E; F$, marcar qual(ais) o(s) item(ns) correspondente(s) as operações matriciais que são possíveis de serem realizadas. E ainda, quando houver possibilidade de realizar a operação matricial, realizar o cálculo e apresentar a matriz resultante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}; \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)};$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(1 \times 3)}; \quad E = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{(3 \times 1)}; \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{(3 \times 2)}$$

- (a) $B - A$; (b) $C + F$; (c) $E + D$; (d) $A + 2B$; (e) $A \times C$ (f) $C + F$
 (g) $E \times D$; (h) $3C \times D^T$ (i) $A^T - B^T$; (j) $5F \times E$ (k) $B - 3D$; (l) $C \times A$.

1.5 - Determinante de uma Matriz

Definição 1.5.1. [Chiapinotto e Lutz (2003)] Seja uma matriz qualquer onde há número de linhas “ m ” e número de colunas “ n ”, a matriz $A = [a_{ij}]$, para todo, $1 \leq i \leq m$, e $1 \leq j \leq n$, onde, a_{ij} representa um elemento de A localizado na linha “ i ” e coluna “ j ”, respectivamente. Admite-se que a matriz A possui o número de colunas “ n ” igual ao número de linhas “ m ”, logo, A é uma matriz quadrada de ordem $m \times n$, lê-se: m linhas por n colunas. Então, o determinante da matriz A é indicado por $Det[A]$, que representa um número real único associado a uma matriz quadrada sendo fundamental na álgebra linear para identificar se uma matriz é inversível, possibilitando resolver sistemas de equações lineares e calcular áreas/volumes na geometria.

1.5.1 - Determinante da Matriz de Ordem 1:

Dada a matriz $A = [a_{ij}]$, para todo, $1 \leq i \leq m$, e $1 \leq j \leq n$, onde, a_{ij} representa um elemento de A localizado na linha “ i ” e coluna “ j ”, respectivamente. Caso a matriz A seja de ordem 1, isto é, $i = 1$ e $j = 1$, logo, quando $A = [a_{11}]$, se tem que, o determinante de A será dado pela Equação (1.13).

$$Det[A] = a_{11}. \quad (1.13)$$

Exemplo 1.5.1. Supondo que exista uma matriz $A = [5]$, então, o determinante de A será dado por:

$$Det[A] = Det[5] = 5.$$

1.5.2 - O Menor Complementar de uma Matriz:

Definição 1.5.2. A denominação menor complementar de uma matriz indica dentre os elementos a_{ij} o(s) seu(s) menor(es) complementar(es), para todo, $1 \leq i \leq m$, e $1 \leq j \leq n$, tal que, $m = n$, com o determinante $Det[A]$ e, uma nova matriz resultante obtida por $\Delta_{(ij)}$, que se pode obter suprimindo a linha “ i ” e a coluna “ j ” que passam por a_{ij} de $\Delta[A]$. Em termos gerais, assumindo como verdadeira a matriz indicada pela Equação (1.14), para $m = n$, se obtém o seguinte resultado para o menor complementar da matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad (1.14)$$

- Quando: $m = n = 2$, em relação ao elemento a_{11} .

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \Rightarrow \Delta_{(11)} = a_{22}.$$

- Quando: $m = n = 3$, em relação ao elemento a_{11} .

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \Rightarrow \Delta_{(11)} = A = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}.$$

- Quando: $A_{(m \times n)}$ e $m = n$, em relação ao elemento a_{11} .

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cdots & \cancel{a_{1n}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \cancel{a_{m1}} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{(m \times n)} \Rightarrow \Delta_{(11)} = A = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{((m-1) \times (n-1))}.$$

Exemplo 1.5.2. A partir da matriz A apresentada a seguir, determinar o menor complementar da matriz A para os elementos: $\Delta_{(11)}$; $\Delta_{(23)}$; $\Delta_{(34)}$; $\Delta_{(42)}$; $\Delta_{(51)}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 9 \\ 5 & -1 & 6 & -3 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 11 & 14 \\ 8 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{(5 \times 5)}$$

Resolução:

$\Delta_{(11)}$:

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{9} \\ \cancel{5} & -1 & 6 & -3 & 8 \\ \cancel{1} & 3 & 9 & 11 & 14 \\ \cancel{8} & -2 & 0 & 1 & 4 \\ \cancel{3} & 10 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{(5 \times 5)} \Rightarrow \Delta_{(11)} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 & 8 \\ 3 & 9 & 11 & 14 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 10 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)}.$$

$\Delta_{(23)}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cancel{4} & 3 & 9 \\ \cancel{5} & \cancel{-1} & \cancel{6} & \cancel{-3} & \cancel{8} \\ 1 & 3 & \cancel{9} & 11 & 14 \\ 8 & -2 & \cancel{0} & 1 & 4 \\ 3 & 10 & \cancel{6} & 5 & 6 \end{bmatrix}_{(5 \times 5)} \Rightarrow \Delta_{(23)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 11 & 14 \\ 8 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)}.$$

$\Delta_{(34)} :$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & \cancel{3} & 9 \\ 5 & -1 & 6 & \cancel{3} & 8 \\ \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{11} & \cancel{14} \\ 8 & -2 & 0 & \cancel{1} & 4 \\ 3 & 10 & 6 & \cancel{3} & 6 \end{bmatrix}_{(5 \times 5)} \Rightarrow \Delta_{(34)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & -1 & 6 & 8 \\ 8 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 10 & 6 & 6 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)}.$$

 $\Delta_{(42)} :$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \cancel{1} & 4 & 3 & 9 \\ 5 & \cancel{1} & 6 & -3 & 8 \\ 1 & \cancel{3} & 9 & 11 & 14 \\ \cancel{8} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{4} \\ 3 & \cancel{10} & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{(5 \times 5)} \Rightarrow \Delta_{(42)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & -3 & 8 \\ 1 & 9 & 11 & 14 \\ 3 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)}.$$

 $\Delta_{(51)} :$

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{2} & 1 & 4 & 3 & 9 \\ \cancel{5} & -1 & 6 & -3 & 8 \\ \cancel{1} & 3 & 9 & 11 & 14 \\ \cancel{8} & -2 & 0 & 1 & 4 \\ \cancel{3} & \cancel{10} & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{6} \end{bmatrix}_{(5 \times 5)} \Rightarrow \Delta_{(51)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 9 \\ -1 & 6 & -3 & 8 \\ 3 & 9 & 11 & 14 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)}.$$

1.5.3 - Cofator Matricial e Matriz Adjunta:

Definição 1.5.3. Seja a matriz $A = [a_{ij}]$, para todo, $1 \leq i \leq m$, e $1 \leq j \leq n$, tal que, $m = n$; os elementos a_{ij} de A possuem Cofatores, isto é, existe $Cof(a_{ij})$ da matriz A dado pelo produto (multiplicação) do determinante da matriz de menor complementar do elemento a_{ij} , em relação ao fator $(-1)^{i+j}$, onde “ i ” indica a linha e “ j ” a coluna do elemento a_{ij} , resultando na Equação (1.15).

$$Cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \times Det[\Delta_{(ij)}]. \quad (1.15)$$

Então, para a Equação (1.14), quando $m = n = 2$, o Cofator do elemento matricial a_{11} , é dado por:

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \Rightarrow \Delta_{(11)} = a_{22}.$$

Logo,

$$Cof(a_{11}) = (-1)^{1+1} \times Det[\Delta_{(11)}] = (-1)^2 \times Det[a_{22}] = 1 \times a_{22} = \mathbf{a_{22}}.$$

Nota 1.5.1. O determinante da matriz de 1 (uma) linha e 1 (uma) coluna, isto é, o determinante da matriz de primeira ordem possui como resultado uma contante, o elemento único da matriz (1×1) .

Definição 1.5.4. Seja a Matriz Adjunta de $A = [a_{ij}]$, dada por $Adj[A]$, para todo, $1 \leq i \leq m$, e $1 \leq j \leq n$, tal que, $m = n$, se pode obter $Adj[A]$, mediante o calculo da matriz transposta da Cofatora da matriz A , logo, para uma matriz A , se tem que, $Adj[A] = [Cof(A)]^T$ ou $Adj[A] = [Cof(A)]'$.

Exemplo 1.5.3. Seja a matriz A [Equação (1.16)], obter a matriz Cofatora e matriz Adjunta de A .

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad (1.16)$$

$$\Delta_{(11)} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = [8]; \quad \Delta_{(12)} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = [2]; \quad \Delta_{(21)} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = [6]; \quad \Delta_{(22)} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = [4].$$

Desta forma, se chega no seguinte resultado,

$$\begin{aligned} Cof(a_{11}) &= (-1)^{1+1} \times Det[\Delta_{(11)}] = (-1)^2 \times Det[8] = (1) \times 8 = \mathbf{8}; \\ Cof(a_{12}) &= (-1)^{1+2} \times Det[\Delta_{(12)}] = (-1)^3 \times Det[2] = (-1) \times 2 = \mathbf{-2}; \\ Cof(a_{21}) &= (-1)^{2+1} \times Det[\Delta_{(21)}] = (-1)^3 \times Det[6] = (-1) \times 6 = \mathbf{-6}; \\ Cof(a_{22}) &= (-1)^{2+2} \times Det[\Delta_{(22)}] = (-1)^4 \times Det[4] = (1) \times 4 = \mathbf{4}. \end{aligned}$$

Então, a partir dos quatro resultados obtidos anteriormente a matriz Cofatora de A é apresentada a seguir e, como $Adj[A] = [Cof(A)]^T$, se tem de forma imediata o resultado dado a seguir.

$$Cof[A] = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \Rightarrow Adj[A] = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}.$$

1.5.4 - Determinante da Matriz de Ordem 2:

Dada uma matriz $A_{(2 \times 2)}$, como visto na Equação (1.17), o determinante da matriz A ou o cálculo do $Det[A]$ é realizado simplesmente, pela diferença entre o produto da diagonal principal em relação ao produto da diagonal secundária da matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad (1.17)$$

$$Det[A] = [a_{11} \times a_{22}] - [a_{21} \times a_{12}].$$

Exemplo 1.5.4. Mediante a matriz A representada pela Equação (1.18), calcular o valor do $\text{Det}[A]$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad (1.18)$$

$$\text{Det}[A] = [1 \times 7] - [5 \times 2] = [7] - [10] = -3.$$

Exercício 1.5.1. [Chiapinotto e Lutz (2003)] Considerando a forma de calculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 (dois) representada pela Equação (1.17), encontrar os valores de x resolvendo cada um dos problemas apresentados a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 3x & x-1 \\ -2 & x \end{bmatrix} = 3; \quad B = \begin{bmatrix} x & x+2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = 0; \quad C = \begin{bmatrix} x & x \\ 5 & x \end{bmatrix} = 0$$

Exercício 1.5.2. Sejam as matrizes A e B dadas a seguir, verificar se é possível realizar o produto matricial $A \times B$. Em caso afirmativo, calcular o determinante da matriz resultante do produto entre essas duas matrizes, isto é, calcular $\text{Det}[A \times B]$. Ainda, caso $A \times B = C$, qual a matriz $\text{Adj}[C]$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

Exercício 1.5.3. [Chiapinotto e Lutz (2003)] Seja uma variável aleatória X , tal que, $0 \leq x \leq 2\pi$ e, assumindo que a forma de calculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 (dois) dada pela Equação (1.17) é válida, solucionar a equação a seguir.

$$\begin{bmatrix} \text{Sen}(x) & 3 \\ -1 & \text{Sen}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.5.4. [Chiapinotto e Lutz (2003)] A partir da matriz A apresentada a seguir, calcular os cofatores a_{12} e a_{22} , segundo a Equação (1.15).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

1.5.5 - Determinante da Matriz de Ordem 3:

Dada uma matriz $A_{(3 \times 3)}$, como visto na Equação (1.19), o determinante da matriz A ou o cálculo do $\text{Det}[A]$ é realizado mediante o calculo dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer, em relação aos respectivos cofatores de a_{ij} , para todo, $1 \leq i \leq m$, e $1 \leq j \leq n$, tal que, $m = n$, isto é, para A sendo uma matriz quadrada.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad (1.19)$$

• **Opção de Cálculo I: Desenvolvendo a primeira linha da matriz A .**

$$\begin{aligned} \text{Det}[A] &= [a_{11} \times \text{Cof}(a_{11})] + [a_{12} \times \text{Cof}(a_{12})] + [a_{13} \times \text{Cof}(a_{13})] \\ &= \{a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \text{Det}[\Delta_{(11)}]\} + \{a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \text{Det}[\Delta_{(12)}]\} + \{a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \text{Det}[\Delta_{(13)}]\} \\ &= \left\{ a_{11} \times (1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right\} + \left\{ a_{12} \times (-1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \right\} + \left\{ a_{13} \times (1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{a_{11} \times [(a_{22} \times a_{33}) - (a_{32} \times a_{23})]\} + \{-a_{12} \times [(a_{21} \times a_{33}) - (a_{31} \times a_{23})]\} \\ &+ \{a_{13} \times [(a_{21} \times a_{32}) - (a_{31} \times a_{22})]\} \\ &= (a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) - (a_{11} \times a_{23} \times a_{32}) - (a_{12} \times a_{21} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{31}) \\ &+ (a_{13} \times a_{21} \times a_{32}) - (a_{13} \times a_{22} \times a_{31}). \end{aligned}$$

• **Opção de Cálculo II: Desenvolvendo a primeira coluna da matriz A .**

$$\begin{aligned} \text{Det}[A] &= [a_{13} \times \text{Cof}(a_{13})] + [a_{23} \times \text{Cof}(a_{23})] + [a_{33} \times \text{Cof}(a_{33})] \\ &= \{a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \text{Det}[\Delta_{(13)}]\} + \{a_{23} \times (-1)^{2+3} \times \text{Det}[\Delta_{(23)}]\} + \{a_{33} \times (-1)^{3+3} \times \text{Det}[\Delta_{(33)}]\} \\ &= \left\{ a_{13} \times (1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \right\} + \left\{ a_{23} \times (-1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \right\} + \left\{ a_{33} \times (1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{a_{13} \times [(a_{21} \times a_{32}) - (a_{31} \times a_{22})]\} + \{-a_{23} \times [(a_{11} \times a_{32}) - (a_{31} \times a_{12})]\} \\ &+ \{a_{33} \times [(a_{11} \times a_{22}) - (a_{21} \times a_{12})]\} \\ &= (a_{13} \times a_{21} \times a_{32}) - (a_{13} \times a_{22} \times a_{31}) - (a_{11} \times a_{23} \times a_{32}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{31}) \\ &+ (a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) - (a_{12} \times a_{21} \times a_{33}). \end{aligned}$$

Conclusão: Portanto, se pode concluir que a **Opção de Cálculo I**, leva ao mesmo resultado obtido pela **Opção de Cálculo II**, o que possibilita escolher entre essas duas formas de cálculo como determinar o valor do determinante de uma matriz quadrada de terceira ordem.

Exemplo 1.5.5. Seja a matriz X dada pela Equação (1.20) e disponível em Gomes (2018), calcular o determinante de X utilizando o método que considera uma única linha e comparar o resultado com o método de utiliza uma única coluna da matriz quadrada de ordem três. Qual a conclusão? Os resultados são realmente iguais?

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad (1.20)$$

• **Resolução pela opção de calculo I: Primeira linha da matriz X .**

$$\begin{aligned} \text{Det}[X] &= [4 \times \text{Cof}(4)] + [2 \times \text{Cof}(2)] + [(-1) \times \text{Cof}(-1)] \\ &= \{4 \times (-1)^{1+1} \times \text{Det}[\Delta_{(11)}]\} + \{2 \times (-1)^{1+2} \times \text{Det}[\Delta_{(12)}]\} + \{(-1) \times (-1)^{1+3} \times \text{Det}[\Delta_{(13)}]\} \\ &= \left\{4 \times (1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right\} + \left\{2 \times (-1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right\} + \left\{(-1) \times (1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \{4 \times [(-3) \times 4 - [6 \times 0]]\} + \{-2 \times [[1 \times 4] - [0 \times 0]]\} \\ &\quad + \{(-1) \times [[1 \times 6] - [0 \times (-3)]]\} \\ &= \{4 \times [-12 - [0]]\} + \{-2 \times [4 - [0]]\} + \{(-1) \times [6 - [0]]\} \\ &= -48 - 8 - 6 = -62. \end{aligned}$$

• **Resolução pela opção de calculo II: Terceira coluna da matriz X .**

$$\begin{aligned} \text{Det}[X] &= [(-1) \times \text{Cof}(-1)] + [0 \times \text{Cof}(0)] + [4 \times \text{Cof}(4)] \\ &= \{(-1) \times (-1)^{1+3} \times \text{Det}[\Delta_{(13)}]\} + \{0 \times (-1)^{2+3} \times \text{Det}[\Delta_{(23)}]\} + \{4 \times (-1)^{3+3} \times \text{Det}[\Delta_{(33)}]\} \\ &= \left\{(-1) \times (1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\right\} + \left\{0 \times (-1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\right\} + \left\{4 \times (1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \{(-1) \times [(1 \times 6) - [0 \times (-3)]]\} + \{(0) \times [(4 \times 6) - (0 \times 2)]\} \\ &\quad + \{4 \times [(4 \times (-3)) - (1 \times 2)]\} \\ &= \{(-1) \times [(6) - (0)]\} + 0 + \{4 \times [(-12) - (2)]\} \\ &= -6 - 56 = -62. \end{aligned}$$

Conclusão: Com a resolução desta questão foi possível concluir que as duas formas de calculo (pela primeira linha ou pela terceira coluna da matriz quadrada de ordem 3) conduzem ao mesmo resultado para o determinante da matriz X , o que indica de forma direta numa plena equivalência entre os dois procedimentos de calculo para o determinante de uma matriz quadrada de terceira ordem.

Resolução pela Regra de Sarrus (Maneira alternativa de calcular o determinante de matriz 3×3):

Definição 1.5.5. [Chiapinotto e Lutz (2003)] Seja uma matriz quadrada A de 3^a ordem (Equação 1.21), o seu determinante poderá ser calculado mediante a “Regra de Sarrus”, sob a seguinte forma. As duas primeiras colunas da matriz são repetidas e adicionadas à direita da matriz A (Equação 1.22) ou, de forma equivalente, se calcula o determinante de $A_{(3 \times 3)}$ com as duas primeiras linhas da matriz A sendo repetidas e adicionadas logo após a 3^a linha desta matriz (Equação 1.23), assim, a matriz $A_{(3 \times 3)}$, passará a ser uma matriz $A'_{(3 \times 5)}$ ou $A''_{(5 \times 3)}$, respectivamente, como podem ser observadas nas Equações (1.22 e 1.23), em seguida são calculados os produtos entre os elementos da diagonal principal em relação ao produto de suas paralelas, subtraí-se deste resultado o produto da diagonal secundária e das suas paralelas a ela.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad (1.21)$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{(3 \times 5)} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} Det[A'] &= [(a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{31}) + (a_{13} \times a_{21} \times a_{32})] \\ &- [(a_{31} \times a_{22} \times a_{13}) + (a_{32} \times a_{23} \times a_{11}) + (a_{33} \times a_{21} \times a_{12})]. \end{aligned}$$

$$A'' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{(5 \times 3)} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} Det[A''] &= [(a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{21} \times a_{32} \times a_{13}) + (a_{31} \times a_{12} \times a_{23})] \\ &- [(a_{31} \times a_{22} \times a_{13}) + (a_{11} \times a_{32} \times a_{23}) + (a_{21} \times a_{12} \times a_{33})]. \end{aligned}$$

Exemplo 1.5.6. Utilizando novamente a matriz X (Equação 1.20) do Exemplo 1.0.12. Calcular o determinante de X mediante a “Regra de Sarrus” e, comparar com o resultado obtido pelo método dos produtos dos elementos de uma fila ou de uma coluna em relação aos respectivos cofatores.

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

Utilizando a Equação (1.22), se pode escrever a matriz X da seguinte forma:

$$X' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 5)}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}[X'] &= [(4 \times (-3) \times 4) + (2 \times 0 \times 0) + ((-1) \times 1 \times 6)] \\ &\quad - [(0 \times (-3) \times (-1)) + (6 \times 0 \times 4) + (4 \times 1 \times 2)] \\ &= [(-48) + (0) + (-6)] - [(0) + (0) + (8)] \\ &= [-54] - [8] = -62. \end{aligned}$$

Ao utilizar a Equação (1.23), um resultado é obtido escrevendo a matriz X sob a seguinte forma:

$$X'' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{(5 \times 3)}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}[X''] &= [(4 \times (-3) \times 4) + (1 \times 6 \times (-1)) + (0 \times 2 \times 0)] \\ &\quad - [(0 \times (-3) \times (-1)) + (4 \times 6 \times 0) + (1 \times 2 \times 4)] \\ &= [(-48) + (-6) + (0)] - [(0) + (0) + (8)] \\ &= [-54] - [8] = -62. \end{aligned}$$

Conclusão: O método de calculo do determinante de uma matriz de terceira ordem denominado de “Regra de Sarrus”, conduz ao mesmo resultado que ao utilizar o método dos produtos dos elementos de uma fila ou de uma coluna em relação aos respectivos cofatores de uma matriz 3×3 . Contudo, devido a simplicidade do calculo da “Regra de Sarrus”, se pode considerar que este método é mais prático e rápido para realizar o calculo do determinante de uma matriz quadrada de terceira ordem.

Exercício 1.5.5. [Chiapinotto e Lutz (2003)] Sejam as matrizes quadradas de ordem 3 (três) A e B apresentadas a seguir. Calcular o determinante de cada uma dessas matrizes mediante a soma dos produtos dos elementos das linhas ou colunas, em relação aos respectivos cofatores nessas matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & y & 0 \\ -y & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

Exercício 1.5.6. [Chiapinotto e Lutz (2003)] Utilizando o método “Regra de Sarrus”, calcular o determinante de cada uma das matrizes de terceira ordem que são apresentadas a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

Exercício 1.5.7. [Chiapinotto e Lutz (2003)] Escolhendo algum método de cálculo do determinante de uma matriz, resolver os sistemas de equações resultantes das matrizes apresentadas a seguir.

a)

$$\begin{bmatrix} 2x & -2 \\ -3 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x^2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{bmatrix} = 5$$

Exercício 1.5.8. [Chiapinotto e Lutz (2003)] Mediante a matriz P de ordem 3×3 dada na Equação (1.24), encontrar o determinante da matriz P^2 .

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad (1.24)$$

Exercício 1.5.9. [Chiapinotto e Lutz (2003)] A partir das matrizes $A; B; C$ que são dadas a seguir, e ainda, assumindo que a matriz B é igual à matriz C , calcular o determinante da matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & y & x \\ z & z & x \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} ; \quad B = \begin{bmatrix} x+y & x+z \\ z-y & z-x \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

Observação 1.5.1. Para resolver estes problemas se deve utilizar os conceitos e definições sobre como calcular o determinante de matrizes de segunda e terceira ordem, isto é, matrizes (2×2) e (3×3) , tal como, já foram formalmente discutidos métodos e formas de resolução do determinante de matrizes.

1.5.6 - Determinante de Matriz de Ordem 4:

Dada uma matriz $A_{(4 \times 4)}$, como visto na Equação (1.25), o determinante da matriz A ou o cálculo do $Det[A]$ é realizado mediante a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna da matriz A), em relação aos respectivos cofatores de a_{ij} , para todo, $1 \leq i \leq m$, e $1 \leq j \leq n$, tal que, $m = n = 4$, isto é, para A sendo uma matriz quadrada de quarta ordem (Teorema de Laplace).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \quad (1.25)$$

Opção de Cálculo I: Desenvolvendo a primeira linha da matriz A .

$$\begin{aligned} Det[A] &= [a_{11} \times Cof(a_{11})] + [a_{12} \times Cof(a_{12})] + [a_{13} \times Cof(a_{13})] + [a_{14} \times Cof(a_{14})] \\ &= \{a_{11} \times [(-1)^{1+1} \times Det(\Delta_{(11)})]\} + \{a_{12} \times [(-1)^{1+2} \times Det(\Delta_{(12)})]\} \\ &+ \{a_{13} \times [(-1)^{1+3} \times Det(\Delta_{(13)})]\} + \{a_{14} \times [(-1)^{1+4} \times Det(\Delta_{(14)})]\} \\ &= \left\{ a_{11} \times (1) \times Det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \right\} + \left\{ a_{12} \times (-1) \times Det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \right\} \\ &+ \left\{ a_{13} \times (1) \times Det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix} \right\} + \left\{ a_{14} \times (-1) \times Det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{a_{11} \times [(a_{22} \times a_{33} \times a_{44}) + (a_{32} \times a_{43} \times a_{24}) + (a_{42} \times a_{23} \times a_{34})] \\ &- [(a_{42} \times a_{33} \times a_{24}) + (a_{22} \times a_{43} \times a_{34}) + (a_{32} \times a_{23} \times a_{44})]\} \\ &- \{a_{12} \times [(a_{21} \times a_{33} \times a_{44}) + (a_{31} \times a_{43} \times a_{24}) + (a_{41} \times a_{23} \times a_{34})] \\ &- [(a_{41} \times a_{33} \times a_{24}) + (a_{21} \times a_{43} \times a_{34}) + (a_{31} \times a_{23} \times a_{44})]\} \\ &+ \{a_{13} \times [(a_{21} \times a_{32} \times a_{44}) + (a_{31} \times a_{42} \times a_{24}) + (a_{41} \times a_{22} \times a_{34})] \\ &- [(a_{41} \times a_{32} \times a_{24}) + (a_{21} \times a_{42} \times a_{34}) + (a_{31} \times a_{22} \times a_{44})]\} \\ &- \{a_{14} \times [(a_{21} \times a_{32} \times a_{43}) + (a_{31} \times a_{42} \times a_{23}) + (a_{41} \times a_{22} \times a_{33})] \\ &- [(a_{41} \times a_{32} \times a_{23}) + (a_{21} \times a_{42} \times a_{33}) + (a_{31} \times a_{22} \times a_{43})]\}. \end{aligned}$$

Propriedades dos determinantes de uma matriz: Identificação imediata (consulta visual)

1. Quando todos os elementos de uma fila ou coluna de uma matriz são iguais a zero, o determinante dessa matriz também será igual a zero.
2. Quando os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz são proporcionais a outra linha ou coluna, respectivamente, dessa mesma matriz, o determinante será igual à zero.

3. Quando os elementos de pelo menos duas linhas ou de duas colunas de uma matriz são iguais entre si (linhas ou colunas repetidas), o determinante dessa matriz será igual a zero.
4. Caso os elementos da linha ou coluna da matriz sejam combinações lineares (soma, diferença etc.) dos elementos de outra linha ou coluna, respectivamente, o determinante da matriz será nulo.

Exemplo 1.5.7. Mediante a matriz A representada pela Equação (1.26), calcular o determinante de A utilizando o Teorema de Laplace, isto é, determinar o $\text{Det}[A]$, a partir da soma dos produtos dos elementos de uma fila ou de uma coluna da matriz A , em relação aos respectivos cofatores de a_{ij} .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Resolução 1: Calculando o $\text{Det}[A]$ mediante a segunda linha, pois, como se tem 3 (três) elementos correspondentes ao número zero ($a_{21} = 0$; $a_{22} = 0$ e $a_{24} = 0$), o calculo segundo o Teorema de Laplace implicará na resolução apenas da matriz cofatora correspondente ao elemento a_{23} .

$$\begin{aligned} \text{Det}[A] &= [a_{21} \times \text{Cof}(a_{21})] + [a_{22} \times \text{Cof}(a_{22})] + [a_{23} \times \text{Cof}(a_{23})] + [a_{24} \times \text{Cof}(a_{24})] \\ &= \{a_{21} \times (-1)^{2+1} \times \text{Det}[\Delta_{(21)}]\} + \{a_{22} \times (-1)^{2+2} \times \text{Det}[\Delta_{(22)}]\} \\ &+ \{a_{23} \times (-1)^{2+3} \times \text{Det}[\Delta_{(23)}]\} + \{a_{24} \times (-1)^{2+4} \times \text{Det}[\Delta_{(24)}]\} \\ &= \left\{ (0) \times (-1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} + \left\{ (0) \times (1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &+ \left\{ (5) \times (-1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} + \left\{ (0) \times (1) \times \text{Det} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= (-5) \times \{[(2 \times 2 \times 1) + ((-1) \times 0 \times 1) + ((-2) \times 1 \times 0)] \\ &- [((-2) \times 2 \times 1) + (2 \times 0 \times 0) + ((-1) \times 1 \times 1)]\} \\ &= (-5) \times \{[(4) + (0) + (0)] - [(-4) + (0) + (-1)]\} \\ &= (-5) \times \{[4] - [-5]\} = (-5) \times \{9\} = \underline{\underline{-45}}. \end{aligned}$$

Resolução 2: Calculando o $Det[A]$ a partir da quarta coluna, onde, são observados 2 (dois) elementos iguais a zero ($a_{24} = 0$ e $a_{34} = 0$), assim, pelo Teorema de Laplace o calculo precisará considerar para resolução apenas as matrizes cofatoras dos elementos a_{14} e a_{44} .

$$\begin{aligned}
 Det[A] &= [a_{14} \times Cof(a_{14})] + [a_{24} \times Cof(a_{24})] + [a_{34} \times Cof(a_{34})] + [a_{44} \times Cof(a_{44})] \\
 &= \{a_{14} \times (-1)^{1+4} \times Det[\Delta_{(14)}]\} + \{a_{24} \times (-1)^{2+4} \times Det[\Delta_{(24)}]\} \\
 &+ \{a_{34} \times (-1)^{3+4} \times Det[\Delta_{(34)}]\} + \{a_{44} \times (-1)^{4+4} \times Det[\Delta_{(44)}]\} \\
 &= \left\{ (1) \times (-1) \times Det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} + \left\{ (0) \times (1) \times Det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \\
 &+ \left\{ (0) \times (-1) \times Det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} + \left\{ (1) \times (1) \times Det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\
 &= (-1) \times \{[(0 \times 2 \times -1) + ((-1) \times 0 \times 5) + ((-2) \times 0 \times 1)] \\
 &- [((-2) \times 2 \times 5) + (0 \times 0 \times 1) + ((-1) \times 0 \times -1)]\} \\
 &+ (1) \times \{[(2 \times 0 \times 1) + (0 \times 2 \times (-3)) + ((-1) \times 1 \times 5)] \\
 &- [((-1) \times 0 \times (-3)) + (2 \times 2 \times 5) + (0 \times 1 \times 1)]\} \\
 &= (-1) \times \{[(0) + (0) + (0)] - [(-20) + (0) + (0)]\} \\
 &+ (1) \times \{[(0) + (0) + (-5)] - [(0) + (20) + (0)]\} \\
 &= \{(-1) \times [(0) - (-20)]\} + \{(1) \times [(-5) - (20)]\} \\
 &= [(-1) \times (20)] + [(1) \times (-25)] = \underline{-45}.
 \end{aligned}$$

Propriedades dos determinantes de uma matriz: Identificação algébrica (precisa calcular)

1. O determinante de uma matriz e de sua transposta são iguais entre si.
2. Ao multiplicar todos os elementos de uma fila ou coluna de uma matriz por um escalar (número real), o determinante dessa matriz ficará multiplicado por esse escalar.
3. Caso sejam trocadas entre si as posições de duas linhas ou de duas colunas de uma matriz, respectivamente, o sinal do determinante dessa matriz será alterado.
4. Quando se tem uma matriz diagonal (superior ou inferior), o determinante será dado pelo produto entre os elementos da diagonal principal dessa matriz.
5. O produto dos determinantes de A por B é igual ao determinante do produto matricial $A \times B$, isto é, $Det[A] \times Det[B] = Det[A \times B]$.

1.6 - Matriz Inversa:

Definição 1.6.1. Seja uma Matriz $A = [a_{ij}]$, para todo, $1 \leq i \leq m$, e $1 \leq j \leq n$, a matriz inversa de A , representada por $Inv[A] = A^{-1}$, quando $m = n$, ou seja, A é uma matriz quadrada de ordem $m \times n$, então, se pode determinar $Inv[A]$ mediante o calculo da Equação (1.27), desde que, o determinante de A seja diferente de zero ($Det[A] \neq 0$) e, neste caso, a matriz A é dita de regular ou não-singular e uma matriz inversível. Caso contrário, a matriz A é dita não regular ou singular e não inversível.

$$A^{-1} = \frac{1}{Det[A]} \times [Cof(A)]^T \quad \text{ou} \quad \frac{1}{Det[A]} \times Adj[A] \quad (1.27)$$

Observação 1.6.1. Caso $Det[A] = 0$, então não existirá a inversa A^{-1} da matriz A .

Exemplo 1.6.1. Seja a matriz A considerada no Exemplo 1.0.10, verificar se existe a A^{-1} .

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Como primeiro passo para verificar se A^{-1} existe, se deve calcular o $Det[A]$ e em seguida, verificar se $Det[A] \neq 0$ e, em caso afirmativo, se pode proceder com os cálculos descritos na Equação (1.27).

$$Det[A] = (4 \times 8) - (2 \times 6) = (32) - (12) = 20.$$

Todavia, como $Det[A] = 20$, se pode proceder com os demais cálculos para determinar A^{-1} , segundo a Equação (1.27). Para calcular a matriz Cofatora de A se deve utilizar a Equação (1.15). Desta forma, se chega que, como a matriz A possui 4 (quatro) elementos, são necessários os cálculos de quatro cofatores para $a_{11}; a_{12}; a_{13}$ e a_{14} .

$$\begin{aligned} Cof(a_{11}) &= (-1)^{1+1} \times Det[\Delta_{11}] = (-1)^2 \times Det[8] = (1) \times (8) = 8. \\ Cof(a_{12}) &= (-1)^{1+2} \times Det[\Delta_{12}] = (-1)^3 \times Det[2] = (-1) \times (2) = -2. \\ Cof(a_{21}) &= (-1)^{2+1} \times Det[\Delta_{21}] = (-1)^3 \times Det[6] = (-1) \times (6) = -6. \\ Cof(a_{22}) &= (-1)^{2+2} \times Det[\Delta_{22}] = (-1)^4 \times Det[4] = (1) \times (4) = 4. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz Cofatora de A é dada pela seguinte matriz.

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Neste contexto, como é necessário obter a $[Cof(A)]^T$, se chega ao seguinte resultado:

$$[Cof(A)]^T = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = Adj[A].$$

Então, se pode concluir que a matriz inversa de A é igual a,

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \times \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{20} & \frac{-6}{20} \\ \frac{-2}{20} & \frac{4}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,3 \\ -0,1 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.6.2. A partir da matriz B de terceira ordem apresentada a seguir. Verificar se B é uma matriz regular ou não-singular. Em caso afirmativo, apresentar a matriz B^{-1} .

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Resolução: O primeiro passo para verificar se B^{-1} existe, é verificar se o $Det[B] \neq 0$. Então, pela regra de Sarrus, se pode acrescentar duas novas linhas na matriz B , ao repetir as duas primeiras linhas abaixo da matriz original, passando de $B_{(3 \times 3)}$ para $B'_{(5 \times 3)}$. Neste contexto, se chega a seguinte matriz,

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{(5 \times 3)}.$$

$$\begin{aligned} Det[B] &= [(0 \times 3 \times 5) + ((-2) \times (-2) \times (0)) + ((-1) \times (3) \times (1))] \\ &\quad - [((-1) \times (3) \times (0)) + ((0) \times (-2) \times (1)) + ((-2) \times (3) \times (5))] \\ &= [(0) + (0) - (3)] - [(0) + (0) + (-30)] \\ &= [-3] + [30] = \mathbf{27}. \end{aligned}$$

Desta forma, como $Det[B] \neq 0$, a matriz inversa de B existe e pode ser calculada. Agora, se deve obter a matriz Cofatora de $B = b_{ij}$, para $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$, pois, $B_{(3 \times 3)}$.

$$\begin{aligned}
Cof(a_{11}) &= (-1)^{1+1} \times Det[\Delta_{11}] = (-1)^2 \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = (1) \times [(3 \times 5) - ((-2) \times 1)] = 17. \\
Cof(a_{12}) &= (-1)^{1+2} \times Det[\Delta_{12}] = (-1)^3 \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = (-1) \times [((-2) \times 5) - ((-1) \times 1)] = 9. \\
Cof(a_{13}) &= (-1)^{1+3} \times Det[\Delta_{13}] = (-1)^4 \times \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = (1) \times [((-2) \times (-2)) - ((-1) \times 3)] = 7. \\
Cof(a_{21}) &= (-1)^{2+1} \times Det[\Delta_{21}] = (-1)^3 \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = (-1) \times [(3 \times 5) - ((-2) \times 0)] = -15. \\
Cof(a_{22}) &= (-1)^{2+2} \times Det[\Delta_{22}] = (-1)^4 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = (1) \times [(0 \times 5) - ((-1) \times 0)] = 0. \\
Cof(a_{23}) &= (-1)^{2+3} \times Det[\Delta_{23}] = (-1)^5 \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = (-1) \times [(0 \times (-2)) - ((-1) \times 3)] = -3. \\
Cof(a_{31}) &= (-1)^{3+1} \times Det[\Delta_{31}] = (-1)^4 \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = (1) \times [(3 \times 1) - ((3) \times 0)] = 3. \\
Cof(a_{32}) &= (-1)^{3+2} \times Det[\Delta_{32}] = (-1)^5 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = (-1) \times [(0 \times 1) - ((-2) \times 0)] = 0. \\
Cof(a_{33}) &= (-1)^{3+3} \times Det[\Delta_{33}] = (-1)^6 \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = (1) \times [(0 \times 3) - ((-2) \times 3)] = 6.
\end{aligned}$$

Portanto, a matriz Cofatora de A é dada pela seguinte matriz.

$$Cof(B) = \begin{bmatrix} 17 & 9 & 7 \\ -15 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow Adj[B] = [Cof(B)]^T = \begin{bmatrix} 17 & -15 & 3 \\ 9 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Então, se pode garantir que a matriz inversa de B é igual a,

$$\begin{aligned}
B^{-1} &= \frac{1}{Det[A]} \times [Cof(A)]^T \\
&= \frac{1}{27} \times \begin{bmatrix} 17 & -15 & 3 \\ 9 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{17}{27} & \frac{-15}{27} & \frac{3}{27} \\ \frac{9}{27} & \frac{0}{27} & \frac{0}{27} \\ \frac{7}{27} & \frac{-3}{27} & \frac{6}{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{27} & \frac{-5}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{7}{27} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

1.7 - Lista de Exercícios

Exercício 1.7.1. Segundo as matrizes A e B dadas a seguir e, disponíveis em Chiapinotto e Lutz (2003). Verificar se A e B são matrizes quadradas de ordem 3 (três) não-singulares e, em caso afirmativo para pelo menos uma destas matrizes, demonstrar matricialmente a não-singularidade de A e/ou B .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & y & 0 \\ -y & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

Exercício 1.7.2. Utilizando as matrizes A ; B ; C e D , que estão disponíveis a seguir, assim como, em Chiapinotto e Lutz (2003). Verificar quais dessas matrizes são inversíveis e portanto, admitem a utilização da Equação (1.27).

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} ;$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} ;$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}$$

Exercício 1.7.3. Seja a matriz W dada a seguir. Encontrar o valor de x e, em seguida verificar se W é uma matriz inversível apresentando o seu resultado para W^{-1} .

$$W = \begin{bmatrix} x & x+2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.7.4. [Chiapinotto e Lutz (2003)] Seja a matriz R dada a seguir. Calcular R^T caso exista, isto é, verificar se existe a matriz inversa de R apresentando o seu resultado.

$$R = \begin{bmatrix} \text{Sen}(x) & \text{Cos}(x) \\ -\text{Cos}(x) & \text{Sen}(x) \end{bmatrix}$$

Exercício 1.7.5. Sejam as matrizes $U; X; Y; Z$, que são dadas a seguir. Verificar qual(ais) admite(m) inversa apresentando os cálculos de $U^{-1}; X^{-1}; Y^{-1}; Z^{-1}$, para justificar a afirmação sobre a invertibilidade (ou não) para cada uma dessas três matrizes quadradas.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & x & 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} 3 & x & 6 \\ 2 & y & 4 \\ 1 & z & 2 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.7.6. Mediante a matriz P de ordem 3×3 dada a seguir e encontrada em Chiapinotto e Lutz (2003). Calcular a matriz P^2 e verificar se esta é inversível, isto é, $[P^2]^{-1}$ existe?

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad (1.28)$$

Exercício 1.7.7. Sejam as matrizes $A; B; C$ encontradas em Chiapinotto e Lutz (2003), e apresentadas a seguir. Verificar se $A; B; C$ são matrizes regulares, ou quantas dessas matrizes são regulares e, em caso de existir pelo menos uma matriz regular, apresente o resultado que justifique essa afirmação.

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & y & x \\ z & z & x \end{bmatrix}_{(3 \times 3)};$$

$$B = \begin{bmatrix} x+y & x+z \\ z-y & z-x \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

Exercício 1.7.8. Seja a matriz A do Exemplo 1.0.14. Verificar se A^{-1} existe e, em caso afirmativo, apresentar a matriz inversa de A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.8 - Operações Matriciais em Análise de Regressão e Correlação

1.8.1 - Estimação dos Parâmetros do Modelo de Regressão Linear Simples

Com o objetivo de se obter estimadores para os coeficientes (parâmetros populacionais desconhecidos), do *Modelo de Regressão Linear Múltipla* dado pela Equação (1.29), pode-se utilizar o método de Estimação de Mínimos Quadrados (EMQ). Desde que, seja possível obter $n > k$ observações, e ainda X_{ij} represente a i -ésima observação ou nível da variável X_j , tal como, mostra a Tabela (3.2).

Tabela 1.1 Dados de um Modelo de Regressão Linear Múltipla

Y	X_1	X_2	\cdots	X_k
Y_1	X_{11}	X_{12}	\cdots	X_{1k}
Y_2	X_{21}	X_{22}	\cdots	X_{2k}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
Y_n	X_{n1}	X_{n2}	\cdots	X_{nk}

Supondo que os erros da Equação (1.29), são *variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas* (*v.a.i.i.d.*), apresentando distribuição *Normal* com média zero e variância σ^2 , ou seja, $E(\varepsilon) = 0$ e $Var(\varepsilon) = \sigma^2$, mediante os termos das observações de X_{ij} , torna-se possível reescrever a Equação (1.29), como:

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i, \\ &= \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Porém, torna-se mais prático e fácil resolver as equações normais sobre tudo para os modelos de regressão linear múltipla, a partir de métodos matriciais, visto que, para o modelo de regressão linear múltipla, através da notação matricial equivalente as Equações normais se pode representar matricialmente o modelo pela Equação (3.14).

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.30)$$

onde cada termo é expresso matricialmente na forma dada na Equação (1.31).

$$\mathbf{Y}_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; \mathbf{X}_{(n \times P)} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta}_{(k \times 1)} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Frequentemente, \mathbf{Y} é um vetor de ordem $n \times 1$ de observações, \mathbf{X} é uma matriz de ordem $n \times P$ dos níveis das variáveis independentes, visto que, $P = k + 1$, porém $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor de ordem $k \times 1$ dos coeficientes de regressão e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um vetor de ordem $n \times 1$ dos resíduos (erros) aleatórios. O objetivo

do estimador de mínimos quadrados é obter o vetor β que minimize a soma de quadrados dos erros, assim se chega ao resultado da Equação (3.16).

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2, \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}' \times \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)' \times (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta). \end{aligned} \quad (1.32)$$

No entanto, o vetor \mathbf{L} pode ser reescrito da seguinte forma da Equação (3.17).

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{Y}' \times \mathbf{Y}) - (\beta' \times \mathbf{X}' \times \mathbf{Y}) - (\mathbf{Y}' \times \mathbf{X} \times \beta) + (\beta' \times \mathbf{X}' \times \mathbf{X} \times \beta) \\ &= (\mathbf{Y}' \times \mathbf{Y}) - 2 \times (\beta' \times \mathbf{X}' \times \mathbf{Y}) + (\beta' \times \mathbf{X}' \times \mathbf{X} \times \beta), \end{aligned} \quad (1.33)$$

em virtude de que, $(\beta' \times \mathbf{X}' \times \mathbf{Y})$ representa um escalar, ou seja, é uma matriz de ordem (1×1) , e consequentemente a sua transposta $(\mathbf{Y}' \times \mathbf{X} \times \beta)$ representa o mesmo escalar. Assim os estimadores dos parâmetros devem satisfazer a condição de maximização estabelecida na Equação (3.18).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \beta} &= -2 \times (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}) + 2 \times (\mathbf{X}' \times \mathbf{X} \times \hat{\beta}) = 0, \\ &= (\mathbf{X}' \times \mathbf{X} \times \hat{\beta}) - (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}) = 0 \\ \Rightarrow (\mathbf{X}' \times \mathbf{X} \times \hat{\beta}) &= (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

A partir da Equação (3.18) tem-se as equações normais de mínimos quadrados, e como a intenção é obter um estimador para o vetor de parâmetros β , deve-se multiplicar em ambos os membros a Equação (3.18), por $(\mathbf{X}' \times \mathbf{X})^{-1}$, ou seja, pela matriz inversa de $(\mathbf{X}' \times \mathbf{X})$, portanto, o estimador de mínimos quadrados é determinado segundo a Equação (3.19), em termos matriciais.

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}' \times \mathbf{X})^{-1} \times (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}). \quad (1.35)$$

O modelo de regressão estimado (ajustado) na forma matricial é representado pela Equação (3.20).

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X} \times \hat{\beta} \quad (1.36)$$

O modelo de regressão estimado (ajustado) na forma escalar é representado segundo a Equação (3.21).

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j X_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.37)$$

Mediante a Equação (3.21) é possível obter o resíduo (erro), fazendo a diferença entre o valor observado Y_i e o valor ajustado \hat{Y}_i , ou seja, $\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$. O vetor dos erros que é uma matriz de ordem $n \times 1$ é representado de acordo com a Equação (3.22).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}. \quad (1.38)$$

1.9 - Exercício com Aplicação em Dados Reais

Um artigo do *Journal of Agricultural Engineering and Research* (2001, p. 275), descreve a utilização de um *Modelo de Regressão Linear Múltipla* para relacionar a suscetibilidade de dano em pêsego (dano causado a fruta, medido em milímetros(*mm*)) devido á Altura da qual caem (altura da queda, medida em milímetros(*mm*)) e a Densidade do pêsego (medida em gramas por centímetros cúbicos *g/cm³*). Um objetivo da análise é fornecer um modelo de predição (previsão) para o dano causado ao pêsego como uma diretriz para as operações de colheita e de pós-colheita. Os dados referentes a este experimento são apresentados na Tabela (1.2).

Tabela 1.2 - Dados sobre os pêsegos danificados durante o manuseio na colheita da safra anual.

Observação	Y (Dano em <i>mm</i>)	X_1 (Altura em <i>mm</i>)	X_2 (Densidade em <i>g/cm³</i>)	\hat{Y}_i	$\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$
1	3,62	303,7	0,90	1,56	2,06
2	7,27	366,7	1,04	7,27	0,00
3	2,66	336,8	1,01	5,83	-3,17
4	1,53	304,5	0,95	3,31	-1,78
5	4,91	346,8	0,98	4,92	-0,01
6	10,36	600,0	1,04	10,34	0,02
7	5,26	369,0	0,96	4,51	0,75
8	6,09	418,0	1,00	6,55	-0,46
9	6,57	269,0	1,01	4,94	1,63
10	4,24	323,0	0,94	3,21	1,03
11	8,04	562,2	1,01	8,79	-0,75
12	3,46	284,2	0,97	3,75	-0,29
13	8,50	558,6	1,03	9,44	-0,94
14	9,34	415,0	1,01	6,86	2,48
15	5,55	349,5	1,04	7,05	-1,50
16	8,11	462,8	1,02	7,84	0,27
17	7,32	333,1	1,05	7,18	0,14
18	12,58	502,1	1,10	11,14	1,44
19	0,15	311,4	0,91	2,01	-1,86
20	5,23	351,4	0,96	4,28	0,95

Fonte: Journal of Agricultural Engineering and Research (2001, p. 275).

Portanto, a matriz \mathbf{X} e o vetor \mathbf{Y} que compõem o modelo de regressão linear múltipla são:

$$\mathbf{X}_{(20 \times 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 303,7 & 0,90 \\ 1 & 366,7 & 1,04 \\ 1 & 336,8 & 1,01 \\ 1 & 304,5 & 0,95 \\ 1 & 346,8 & 0,98 \\ 1 & 600,0 & 1,04 \\ 1 & 369,0 & 0,96 \\ 1 & 418,0 & 1,00 \\ 1 & 269,0 & 1,01 \\ 1 & 323,0 & 0,94 \\ 1 & 562,2 & 1,01 \\ 1 & 284,2 & 0,97 \\ 1 & 558,6 & 1,03 \\ 1 & 415,0 & 1,01 \\ 1 & 349,5 & 1,04 \\ 1 & 462,8 & 1,02 \\ 1 & 333,1 & 1,05 \\ 1 & 502,1 & 1,10 \\ 1 & 311,4 & 0,91 \\ 1 & 351,4 & 0,96 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y}_{(20 \times 1)} = \begin{bmatrix} 3,62 \\ 7,27 \\ 2,66 \\ 1,53 \\ 4,91 \\ 10,36 \\ 5,26 \\ 6,09 \\ 6,57 \\ 4,24 \\ 8,04 \\ 3,46 \\ 8,50 \\ 9,34 \\ 5,55 \\ 8,11 \\ 7,32 \\ 12,58 \\ 0,15 \\ 5,23 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{X}'_{(3 \times 20)} \times \mathbf{X}_{(20 \times 3)}$ é igual à:

$$\mathbf{X}' \times \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 303,70 & \cdots & 351,40 \\ 0,90 & \cdots & 0,96 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 303,70 & 0,90 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 351,40 & 0,96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,00 & 7767,80 & 19,93 \\ 7767,80 & 3201646 & 7791,88 \\ 19,93 & 7791,88 & 19,91 \end{bmatrix}.$$

O vetor $\mathbf{X}'_{(3 \times 20)} \mathbf{Y}_{(20 \times 1)}$ que é equivalente ao resultado:

$$\mathbf{X}' \times \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 303,70 & 366,70 & \cdots & 351,40 \\ 0,90 & 1,04 & \cdots & 0,96 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3,62 \\ 7,27 \\ \vdots \\ 5,23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120,79 \\ 51129,17 \\ 122,70 \end{bmatrix}.$$

Segundo a Equação (3.19), os estimadores de mínimos quadrados podem ser obtidos, logo,

$$\begin{aligned}\beta &= (\mathbf{X}' \times \mathbf{X})^{-1} \times (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}) \\ \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 20,00 & 7767,80 & 19,93 \\ 7767,80 & 3201646 & 7791,88 \\ 19,93 & 7791,88 & 19,91 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 120,79 \\ 51129,17 \\ 122,70 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 24,636660 & 0,0053210 & -26,746790 \\ 0,005321 & 0,0000077 & -0,008353 \\ -26,746790 & -0,0083530 & 30,096389 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 120,79 \\ 51129,17 \\ 122,70 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -33,8310 \\ 0,0131 \\ 34,8900 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

O modelo de regressão linear múltipla ajustado para prever os danos em milímetros causados aos pêssegos durante o manuseio na colheita da safra anual é dado pela equação:

$$\hat{Y} = -33,8310 + 0,0131(X_1) + 34,8900(X_2).$$

Capítulo 2

Diagrama de Dispersão e Coeficiente de Correlação Linear de Pearson

2.1 - Introdução

Investigar uma possível associação estatística entre variáveis quantitativas possibilita estimar a magnitude de uma relação diretamente proporcional, ou inversamente proporcional existente entre características numéricas. Qual o objetivo em determinar a correlação entre duas variáveis? Para realizar previsões futuras sobre algum fenômeno da realidade que se deseja investigar. Neste caso extrapola-se para o futuro as relações de causa e efeito já observadas no passado entre as variáveis. Pesquisadores interessados em “simular” os efeitos causados sobre uma variável Y em decorrência de alterações introduzidas nos valores de uma variável X também usam esta referida metodologia.

Caso se comprove inicialmente a partir de um diagrama de dispersão que a relação entre as variáveis é linear, isto implica que a associação entre Y e X pode ser quantificada mediante o coeficiente de correlação linear simples de *Pearson*, e, para Moore (2000) mede a intensidade e a direção da relação linear entre duas variáveis quantitativas. Portanto, se pode observar diversos problemas onde duas ou mais características observáveis (variáveis) se apresentam intrinsecamente relacionadas, e assim, a natureza dessa relação necessariamente deve ser explorada (Ver, Hines, 2006).

2.2 - Relação de Causa e Efeito entre Variáveis Aleatórias

Em muitos momentos na Estatística busca-se associar (relacionar) duas características (variáveis) observáveis de uma população, tais como, Numero de Matriculados *versus* Nível de Dificuldade de uma Disciplina Optativa; Peso *versus* Altura; Idade *versus* Nível de Instrução; Temperatura *versus* Pressão; Consumo *versus* Tempo, Remuneração *versus* Grau de Escolaridade, etc. Portanto, procura-se uma função de X (variável independente) que explique Y (variável dependente), como a Equação (2.1), para tentar representar cientificamente as possíveis relações de causa e efeito entre as variáveis.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X, \quad (2.1)$$

onde, β_0 e β_1 , são o coeficiente linear e coeficiente angular, respectivamente, e ainda, a relação entre X

e Y pode ser representada também como demonstrado na Equação (2.2), tal que, a variável aleatória Y passa a ser determinada de forma simétrica ou equivalente, mediante uma função $f(x)$.

$$X, Y \rightarrow Y \simeq f(X).$$

(2.2)

Para que seja possível associar duas variáveis, X e Y por exemplo, tais como as definidas na Equação (2.1), se faz necessário a existência de alguma relação entre as mesmas, o que se conhece na estatística como *correlação* e pode ser comprovada visualmente mediante um diagrama de dispersão para X e Y .

2.3 - Diagrama de Dispersão

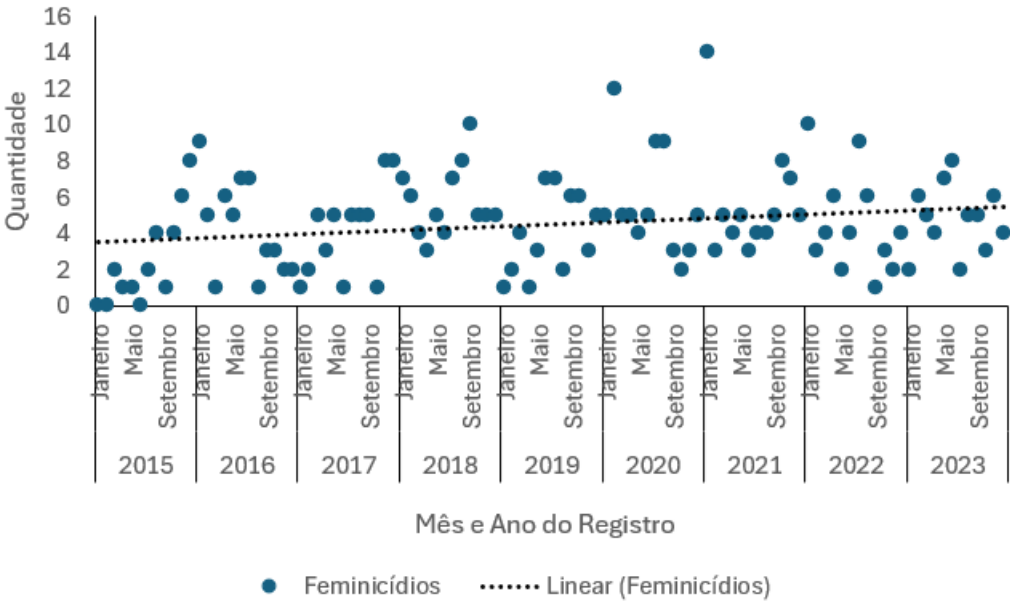
A relação entre variáveis quantitativas na maioria das vezes não é perfeita, ou seja, os pontos originados a partir de uma relação direta, inversa ou inexistência de associação entre as variáveis, não resulta no posicionamento dos pontos sobre uma função teórica, a qual representa uma associação ou ausência dela entre características observáveis. Este fato, pode ser explicado devido à erros de medições destas variáveis, ou mesmo, a não existência de associação funcional entre as características em questão, como pode ser verificado para os diagramas de dispersão dados pela Figuras (2.1) a (2.3), construídos, respectivamente, a partir dos dados apresentados nas Tabelas (2.1) a (2.3).

Tabela 2.1 - Registros de Ocorrências de Feminicídios no Estado do Pará, no período de 2015 a 2023.

Ano Mês/Variável	2015		2016		2017		2018		2019		2020		2021		2022		2023	
	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X
Jan	0	1	9	13	1	25	7	37	1	49	5	61	14	73	10	85	2	97
Fev	0	2	5	14	2	26	6	38	2	50	12	62	3	74	3	86	6	98
Mar	2	3	1	15	5	27	4	39	4	51	5	63	5	75	4	87	5	99
Abr	1	4	6	16	3	28	3	40	1	52	5	64	4	76	6	88	4	100
Mai	1	5	5	17	5	29	5	41	3	53	4	65	5	77	2	89	7	101
Jun	0	6	7	18	1	30	4	42	7	54	5	66	3	78	4	90	8	102
Jul	2	7	7	19	5	31	7	43	7	55	9	67	4	79	9	91	2	103
Ago	4	8	1	20	5	32	8	44	2	56	9	68	4	80	6	92	5	104
Set	1	9	3	21	5	33	10	45	6	57	3	69	5	81	1	93	5	105
Out	4	10	3	22	1	34	5	46	6	58	2	70	8	82	3	94	3	106
Nov	6	11	2	23	8	35	5	47	3	59	3	71	7	83	2	95	6	107
Dez	8	12	2	24	8	36	5	48	5	60	5	72	5	84	4	96	4	108

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados da SEGUP/Pará (2024).

Figura 2.1 - Diagrama de Dispersão para os Registros de Ocorrências de Feminicídios no Estado do Pará, no período de 2015 a 2023.



Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados da SEGUP/Pará (2024).

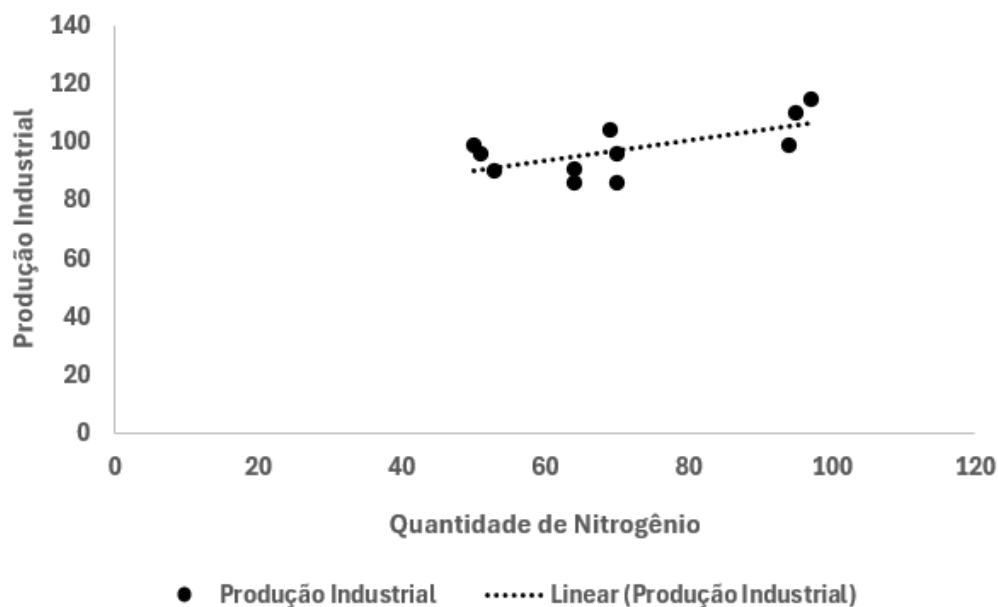
Ao analisar a Figura (2.1), não é possível perceber uma associação expressiva entre as variáveis Y (quantidade de Feminicídios) e X (Mês e Ano de registro), o que induz a interpretação de que o número de Feminicídios registrados no Estado do Pará, durante o período de 9 (nove) anos consecutivos (2015 a 2023), não possui uma razoável relação estatística (direta ou inversa) com o mês e ano em que este tipo de crime foi registrado no recorte temporal considerado, pois, os pontos observados no diagrama de dispersão não se encontram posicionados segundo uma trajetória semelhante a uma diagonal (crescente ou decrescente), devido os pontos deste gráfico estarem se posicionando próximos do eixo X no plano cartesiano, o que em termos de aferição da magnitude da associação entre Y e X , indica uma tendência de relação linear muito mais próxima de zero, ao invés de tender a ± 1 (resultado esperado), o que sugere a possibilidade de uma fraca associação entre as variáveis Y e X .

Tabela 2.2 - Quantidade de Nitrogênio (X) Observada em relação a Produção (Y) Obtida no Ano de 2003, em uma Indústria de um Município Hipotético, Estado do Pará.

Variável/Local	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X	70	97	53	64	95	64	50	70	94	69	51
Y	86	115	90	86	110	91	99	96	99	104	96

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

Figura 2.2 - Diagrama de Dispersão da Quantidade de Nitrogênio (X) em relação a Produção (Y) Obtida no Ano de 2003, em uma Indústria de um Município Hipotético, Estado do Pará.



Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

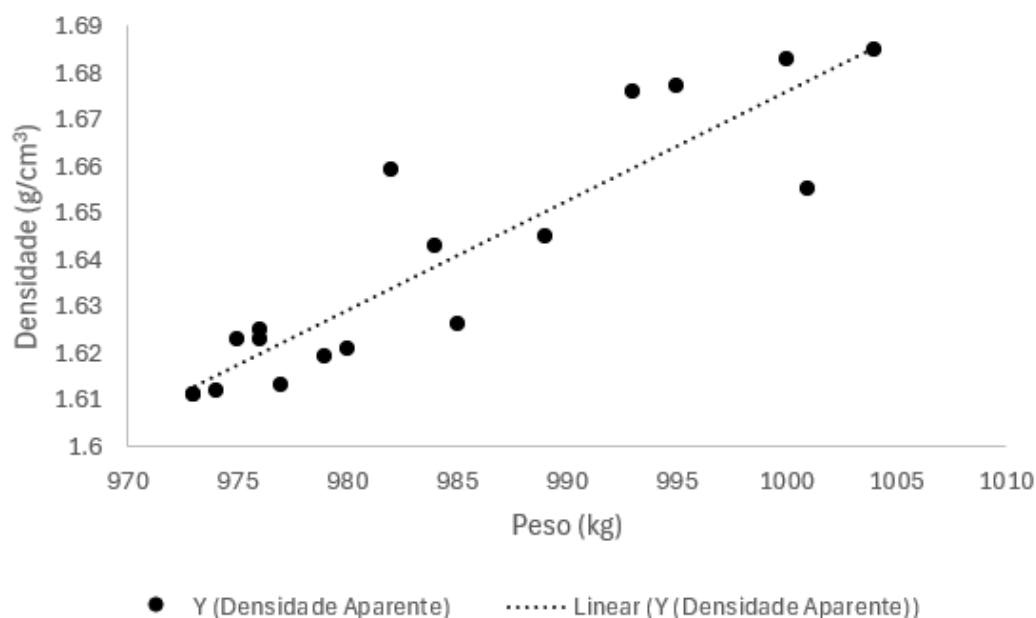
Analisando a Figura (2.2), se pode perceber uma razoável aproximação entre os pontos e uma tendência crescente nas interseções referentes aos dados da variável Y em relação à X . Assim, os pontos observados neste gráfico indicam uma possível relação linear entre as variáveis Y e X , visto que, os pontos do diagrama de dispersão se posicionam aproximadamente sobre uma reta imaginária diagonal (secundária, como visto numa matriz quadrada), com um comportamento aproximadamente crescente, a medida que os valores das variáveis Y e X aumentam no plano cartesiano em questão.

Tabela 2.3 - Peso (X) em relação a Densidade Aparente (Y) de um Eletrodo Produzido no Ano de 2003, em uma Indústria Localizada num Município Hipotético, Estado do Pará.

Variável/Local	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X (em kg)	976	1004	973	982	973	975	993	974	976
Y (em g/cm^3)	1,623	1,685	1,611	1,659	1,611	1,623	1,676	1,612	1,625
Variável/Local	10	11	12	13	14	15	16	17	18
X (em kg)	1000	977	989	995	984	985	979	1001	980
Y (em g/cm^3)	1,683	1,613	1,645	1,677	1,643	1,626	1,619	1,655	1,621

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

Figura 2.3 - Diagrama de Dispersão do Peso (X) em relação a Densidade Aparente (Y) de um Eletrodo Produzido no Ano de 2003, em uma Indústria Localizada num Município Hipotético, Estado do Pará.



Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

De acordo com a Figura (2.3), se torna possível identificar uma aproximação entre os pontos produzidos pela interseção dos valores das variáveis Y e X , além de uma tendência crescente dos dados de Y em relação à X . É factível supor que os pontos observados neste gráfico indicam uma associação linear direta (grandezas diretamente proporcionais) entre as variáveis Y e X , pois, no diagrama de dispersão os pontos estão localizados aproximadamente sobre uma reta imaginária diagonal (secundária, como visto numa matriz quadrada), com comportamento claramente crescente, a medida que os valores de peso do eletrodo aumentam, os valores da densidade aparente também aumentam no plano cartesiano em questão. Isso indica uma relação de causa e efeito direta entre as variáveis Y e X , onde a densidade aparente está aumentando proporcionalmente e diretamente em relação ao peso do eletrodo.

Quando se plotar os pares de informação referente a cada observação em um plano cartesiano se obtém uma nuvem de pontos cujo eixo definirá um padrão de relacionamento entre X e Y (Ver, Bussab e Morettin, 2024). A relação será linear no caso de observada uma tendência ou eixo linear na nuvem de pontos cartesianos. A relação entre as variáveis será diretamente proporcional (positiva) se os valores de Y aumentam quando também se elevam os valores de X . Será inversamente proporcional (negativa) quando os valores de Y variam de forma inversa em relação aos de X .

2.4 - Coeficiente de Correlação Linear Simples de Pearson

O coeficiente de correlação linear simples de *Pearson* (r), é o valor que quantifica, quanto à *força* e ao *sentido* a associação entre as variáveis relacionadas, onde a correlação é definida em um intervalo $[-1; +1]$. Valores de r igual ou próximos de 1 ou -1 indica que existe uma forte relação entre as variáveis: No primeiro caso a relação é diretamente proporcional, enquanto que no segundo a relação é inversamente proporcional. Valores próximos de Zero, significa que existe pouco relacionamento entre as variáveis, desta forma a classificação para o coeficiente r é estabelecida segundo a Tabela (2.4).

Tabela 2.4 - Classificação quanto a Força e Sentido da Correlação Linear Simples de *Pearson*.

Correlação (r)	Força	Sentido
0	Ausência de Correlação	Ausência de Correlação
$(0, 0; -0, 50]$ ou $(0, 0; +0, 50]$	Fraca Correlação	Negativa ou Positiva.
$[-0, 51; -0, 90]$ ou $[+0, 51; +0, 90]$	Moderada Correlação	Negativa ou Positiva.
$[-0, 91; -0, 99]$ ou $[+0, 91; +0, 99]$	Forte Correlação	Negativa ou Positiva.
-1 ou +1	Correlação Perfeita	Negativa ou Positiva.

Fonte: Ramos *et al.* (2013).

O coeficiente de correlação linear simples de *Pearson*, pode ser determinado pela Equação (2.3).

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \times \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}, \quad (2.3)$$

onde, \bar{X} e \bar{Y} são a média aritmética de X e a média aritmética de Y , respectivamente.

Exemplo 2.4.1. Aplicando a Equação (2.3) aos dados da Tabela (2.5), torna-se possível calcular o valor de r .

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - 27)(Y_i - 380)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - 27)^2 \times \sum_{i=1}^n (Y_i - 380)^2}}$$

Tabela 2.5 - Determinação dos Somatórios Para a Correlação Linear Simples de *Pearson*.

X	Y	$(Y_i - 380)^2$	$(X_i - 27)^2$	$(X_i - 27) \times (Y_i - 380)$
30	430	2.500	9	150
21	335	2.025	36	270
35	520	19.600	64	1.120
42	490	12.100	225	1.650
37	470	8.100	100	900
20	210	28.900	49	1.190
08	195	34.225	361	3.515
17	270	12.100	100	1.100
35	400	400	64	160
25	480	10.000	4	-200
270	3.800	129.950	1.012	9.855

Portanto, a partir dos resultados obtidos na Tabela (2.5), se torna possível determinar que,

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{9.855}{\sqrt{1.012 \times 129.950}} \\
 &= \frac{9.855}{\sqrt{131.509.400}} \\
 &= \frac{9.855}{11.467,7548} \\
 &\cong 0,86.
 \end{aligned}$$

Desta forma, como o valor calculado para o coeficiente de Correlação Linear Simples de *Pearson* é igual a $r \cong 0,86$, então, mediante a Tabela (2.4), se torna possível a classificação quanto à força e sentido deste resultado, onde conclui-se que as variáveis X e Y , apresentam uma forte correlação linear positiva, além de suscitar a interpretação de uma relação diretamente proporcional entre estas variáveis, isto é, o aumento na magnitude dos valores da variável X , necessariamente também produz um aumento na variável Y , e vice-versa.

2.5 - Teste de Hipóteses do Coeficiente de Correlação Linear Simples de Pearson

Ao utilizar a estatística inferencial, a qual trata dentre outras implicações da determinação do Coeficiente de Correlação Linear Simples de *Pearson* (CLSP). Considera-se parte de uma amostra onde são estabelecidas hipóteses sobre a população de origem, e, então se formula previsões fundamentadas na teoria das probabilidades. Portanto, o objetivo é testar se a correlação obtida para os dados da Tabela (2.5), é estatisticamente diferente de zero, e portanto, significativa a um grau de confiança do teste pré fixado. Assim, mediante a Equação (2.4) têm-se as hipóteses a serem testadas para avaliar a significância estatística do resultado obtido para a correlação linear simples de ‘*Pearson*’.

$$\begin{cases} H_0 : r = 0 & (\text{Não existe CLSP entre as variáveis } X \text{ e } Y) \\ H_1 : r \neq 0, & (\text{Existe CLSP entre as variáveis } X \text{ e } Y), \end{cases} \quad (2.4)$$

onde, mediante a hipótese alternativa (H_1) verifica-se que este teste é *bilateral*, ou seja, caso se rejeite H_0 , tem-se duas implicações possíveis para a correlação linear simples de *Pearson*, a qual poderá ser *menor que zero* (negativa: variáveis inversamente proporcionais) ou *maior que zero* (positiva: variáveis diretamente proporcionais).

A Estatística apropriada para testar as hipóteses dadas pela Equação (2.4), segundo Hines *et al.* (2006) é representada pela Equação (2.5). É importante ressaltar que a variável Y expressa na Equação (2.1), é admitida como seguindo uma distribuição Normal com média μ e σ^2 . Porém, como a variância populacional σ^2 é desconhecida, a estatística para testar as hipóteses na Equação (2.4) é proveniente da função densidade de probabilidade *t-Student* com $n - 2$ graus de liberdade.

$$t_0 = \frac{r \times \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (2.5)$$

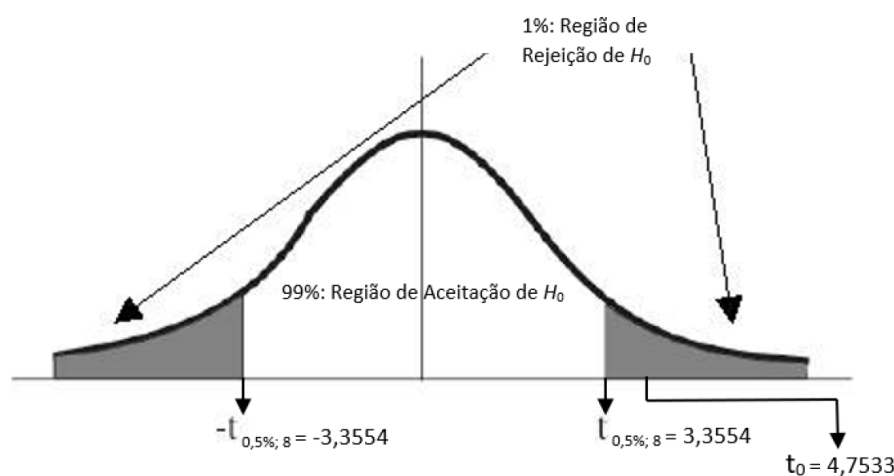
onde, t_0 segue uma distribuição *t-Student*, com $n - 2$ graus de liberdade se $H_0 : r = 0$ for verdadeira, r é o Coeficiente de Correlação Linear Simples de *Pearson* obtido, e, n é o tamanho da amostra, ou seja, o número de observações de cada variável. Portanto, se toma a decisão de rejeitar H_0 se $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2}; n-2}$.

Exemplo 2.5.1. Mediante os dados da Tabela (2.5), os quais possibilitam o cálculo e substituição dos termos na Equação (2.5), tornam possível determinar o valor calculado da estatística de teste t_0 mediante a distribuição de *t-Student*. Neste contexto, o valor de t_0 será dado por:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{0,86 \times \sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0,86^2}} = \frac{0,86 \times \sqrt{8}}{\sqrt{1-0,7396}} \\ &= \frac{0,86 \times 2,8284}{\sqrt{0,2604}} = \frac{2,4324}{0,5103} \\ &= \boxed{4,7533} \end{aligned}$$

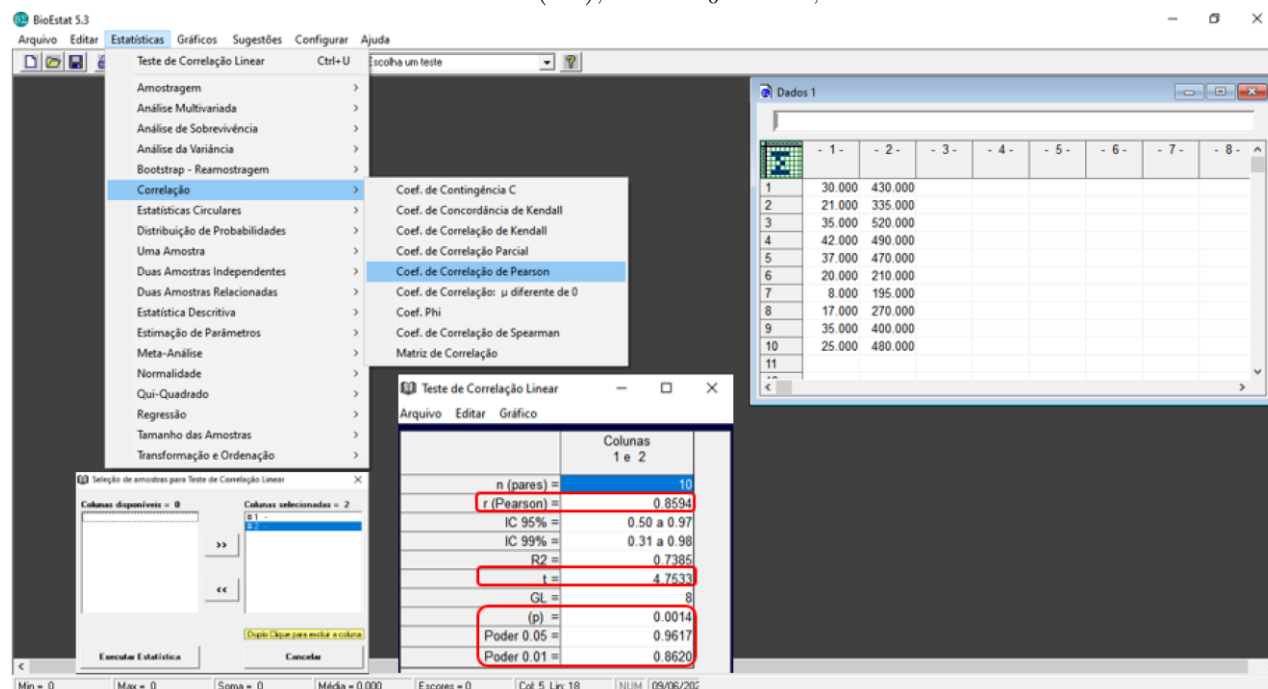
Conclusão: Admitindo um erro tipo I igual a 1%, então, o valor crítico ou tabelado da distribuição *t-Student* será dado por $t_{\frac{1}{2}, 10-2} = t_{0,5;8} = 3,3554$. Logo, como $t_0 = 4,7533 > t_{0,5;8} = 3,3554$ (Ver, Figura 3.8), se deve tomar a decisão de rejeitar a hipótese $H_0 : r = 0$, ao nível de significância de 1%. Adicionalmente, a partir de um *Software* estatístico, por exemplo, o *BioEstat* 5.0, é possível realizar o teste de significância da correlação de *Pearson* (Ver, Figura 2.4), onde o *p-Valor* deste teste é igual a 0,0014. Neste contexto, ao nível de significância de 1%, assim como supramencionado se deve rejeitar a hipótese de que $r = 0$. Então, as variáveis X e Y possuem uma forte correlação positiva, e, estatisticamente significativa ao nível de 1%. Contudo, com o auxílio de um *Software* estatístico é possível identificar o poder do teste de significância de r igual a 0,8620 (Ver, Figura 2.5), para $\alpha = 0,01$, e o erro tipo II (β) = 0,138, porém, caso o erro tipo I aumente para 5%, o poder do teste será 0,9617 (96,17%) e $\beta = 0,038$ (3,83% = 100,00% - 96,17%).

Figura 2.4 - Teste de Hipóteses Mediante os Dados da Tabela (2.5), com Regiões de Aceitação e Rejeição para $H_0 : r = 0$, Referentes às Variáveis X e Y , ao nível de significância de 1%.



Fonte: Elaborado pelo Autor, mediante dados da Tabela (2.5).

Figura 2.5 - Teste de Hipóteses para a Correlação Linear de *Pearson* Realizado Via BioEstat 5.0, Mediante os Dados Fornecidos na Tabela (2.5), onde $H_0 : r = 0$, Referente às Variáveis X e Y .



Fonte: <https://www.mamiraua.org.br/downloads/programas/>

2.6 - Conclusão

Conclui-se que a interpretação da existência de uma correlação linear simples entre duas variáveis através do diagrama de dispersão pode ser subjetiva. Logo, uma forma precisa e eficaz de quantificar esta relação quanto a sua força (fraca, moderada, forte, fortíssima) e sentido (positiva ou negativa), é por meio do cálculo do Coeficiente de Correlação Linear Simples de *Pearson*. Neste sentido, o Coeficiente de Correlação Linear Simples de *Pearson* é uma ferramenta Estatística fundamental para a tomada de decisão, quando a intenção for relacionar duas características (variáveis) de maneira que, as mesmas apresentem uma relação de causa e efeito, o que vem a gerar condições a partir desta metodologia combinada com outra ferramenta Estatística, que são os Modelos de Regressão Linear Simples de se prever uma variável que é expressa em função de outra, dada a capacidade de uma das variáveis deste modelo a qual é chamada de Variável Independente, em explicar de forma eficaz a variabilidade existente na outra variável inserida no modelo, a qual se denomina de Dependente.

2.7 - Lista de Exercícios

1. Mediante as informações fornecidas na Tabela (2.6), determinar os itens a seguir.
 - (a) Formular as hipóteses estatísticas neste problema considerando um teste para o coeficiente de correlação linear de *Pearson* entre as variáveis ano de 2019 e 2020.
 - (b) Admitindo um erro tipo I de 5% neste teste de hipóteses, qual a sua conclusão sobre o resultado obtido? É possível afirmar que os anos de registros de ocorrências do crime de latrocínio no primeiro semestre dos anos de 2019 e 2020 estão correlacionados? Há significância estatística ao nível de 5% para o teste de $H_0 : r = 0$? Justifique a sua resposta.
 - (c) Qual foi o erro tipo II cometido neste teste de hipóteses, sendo que o erro tipo I foi 5% ?

Tabela 2.6 - Registros de Ocorrências de Feminicídios no Estado do Pará, no período de 2015 a 2023.

Ano Mês/Variável	2015		2016		2017		2018		2019		2020		2021		2022		2023	
	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X
Jan	0	1	9	13	1	25	7	37	1	49	5	61	14	73	10	85	2	97
Fev	0	2	5	14	2	26	6	38	2	50	12	62	3	74	3	86	6	98
Mar	2	3	1	15	5	27	4	39	4	51	5	63	5	75	4	87	5	99
Abr	1	4	6	16	3	28	3	40	1	52	5	64	4	76	6	88	4	100
Mai	1	5	5	17	5	29	5	41	3	53	4	65	5	77	2	89	7	101
Jun	0	6	7	18	1	30	4	42	7	54	5	66	3	78	4	90	8	102
Jul	2	7	7	19	5	31	7	43	7	55	9	67	4	79	9	91	2	103
Ago	4	8	1	20	5	32	8	44	2	56	9	68	4	80	6	92	5	104
Set	1	9	3	21	5	33	10	45	6	57	3	69	5	81	1	93	5	105
Out	4	10	3	22	1	34	5	46	6	58	2	70	8	82	3	94	3	106
Nov	6	11	2	23	8	35	5	47	3	59	3	71	7	83	2	95	6	107
Dez	8	12	2	24	8	36	5	48	5	60	5	72	5	84	4	96	4	108

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados da SEGUP/Pará (2024).

2. Mediante as informações fornecidas na Tabela (2.7), determinar os itens a seguir.
 - (a) Formular as hipóteses estatísticas neste problema considerando um teste para o coeficiente de correlação linear de *Pearson* entre as variáveis quantidade de nitrogênio e produção.
 - (b) Assumindo um erro tipo I de 1% neste teste de hipóteses, qual a sua conclusão sobre o

resultado obtido? É possível afirmar que a quantidade de nitrogênio observada e produção da indústria no ano de 2003 estão correlacionadas? Há evidências de significância estatística ao nível de 1% para o teste da hipótese $H_0 : r = 0$? Justifique a sua resposta.

- (c) Qual foi o erro tipo II cometido neste teste de hipóteses, sendo que o erro tipo I foi 1% ?

Tabela 2.7 - Quantidade de Nitrogênio (X) Observada em relação a Produção (Y) Obtida no Ano de 2003, em uma Indústria de um Município Hipotético, Estado do Pará.

Variável/Local	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X	70	97	53	64	95	64	50	70	94	69	51
Y	86	115	90	86	110	91	99	96	99	104	96

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

3. Mediante as informações fornecidas na Tabela (2.8), determinar os itens a seguir.

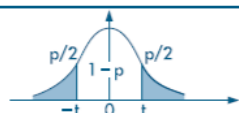
- (a) Formular as hipóteses estatísticas neste problema considerando um teste para o coeficiente de correlação linear de *Pearson* entre as variáveis peso e densidade aparente de um eletrodo.
- (b) Considerando um erro tipo I de 1% neste teste de hipóteses, qual a sua conclusão sobre o resultado obtido? É possível afirmar que entre o peso e a densidade aparente do eletrodo produzido na indústria do município paraense, durante o ano de 2003, existe uma correlação linear simples de *Pearson* ? Há evidências suficientes quanto a significância estatística ao nível de 1%, para o teste da hipótese $H_0 : r = 0$? Justifique a sua resposta.
- (c) Qual foi o erro tipo II cometido neste teste de hipóteses, sendo que o erro tipo I foi 1% ?

Tabela 2.8 - Peso (X) em relação a Densidade Aparente (Y) de um Eletrodo Produzido no Ano de 2003, em uma Indústria Localizada num Município Hipotético, Estado do Pará.

Variável/Local	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X (em kg)	976	1004	973	982	973	975	993	974	976
Y (em g/cm^3)	1,623	1,685	1,611	1,659	1,611	1,623	1,676	1,612	1,625
Variável/Local	10	11	12	13	14	15	16	17	18
X (em kg)	1000	977	989	995	984	985	979	1001	980
Y (em g/cm^3)	1,683	1,613	1,645	1,677	1,643	1,626	1,619	1,655	1,621

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

2.8 - Tabela da Função Densidade de Probabilidade *t-Student*Figura 2.6 - Tabela de Valores Críticos, Graus de Confiança e Graus de Liberdade da Função Densidade de Probabilidade *t-Student*.

Graus de liberdade v	Tabela V — Distribuição t de Student Corpo da tabela dá os valores t_c tais que $P(-t_c < t < t_c) = 1 - p$. Para $v > 120$, usar a aproximação normal. 															Graus de liberdade v
	p = 90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%	
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	15,894	31,821	63,657	318,309	636,619	1
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925	22,327	31,598	2
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841	10,214	12,924	3
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	2,998	3,747	4,604	7,173	8,610	4
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	2,756	3,365	4,032	5,893	6,869	5
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707	5,208	5,959	6
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499	4,785	5,408	7
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355	4,501	5,041	8
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250	4,297	4,781	9
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169	4,144	4,587	10
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106	3,925	4,437	11
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055	3,930	4,318	12
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012	3,852	4,221	13
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977	3,787	4,140	14
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,248	2,602	2,947	3,733	4,073	15
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921	3,686	4,015	16
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898	3,646	3,965	17
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878	3,610	3,922	18
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861	3,579	3,883	19
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845	3,552	3,850	20
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831	3,527	3,819	21
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819	3,505	3,792	22
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807	3,485	3,768	23
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797	3,467	3,745	24
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,166	2,485	2,787	3,450	3,725	25
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779	3,435	3,707	26
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771	3,421	3,690	27
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,684	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763	3,408	3,674	28
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756	3,396	3,659	29
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750	3,385	3,646	30
35	0,126	0,255	0,388	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	2,030	2,133	2,438	2,724	3,340	3,591	35
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704	3,307	3,551	40
50	0,126	0,254	0,387	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678	3,261	3,496	50
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660	3,232	3,460	60
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,076	2,358	2,617	3,160	3,373	120
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291	∞
	p = 90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%	

Fonte: Bussab e Morettin (2024).

Capítulo 3

Análise de Regressão Linear Simples

3.1 - Introdução

Em diversas situações reais se tem a necessidade de estabelecer cientificamente uma relação de causa e efeito entre duas ou mais características numéricas (variáveis aleatórias) de interesse. “O estudo da regressão aplica-se àquelas situações em que há razões para supor uma relação de causa-efeito entre duas variáveis quantitativas e se deseja expressar matematicamente essa relação” (Colosimo, 2026)*.

3.2 - Modelo de Regressão Linear Simples

Em virtude de questões metodológicas e de interpretação prática, em modelos de regressão linear simples se tem uma variável dependente, também chamada de variável resposta, a qual é representada usualmente pela notação Y e, uma variável independente X (preditora, explicativa ou fator) para tentar estabelecer uma relação de causa e efeito entre as variáveis Y e X , como pode ser observado na Equação (3.1). O sinal do parâmetro/coeficiente β_1 dependerá da relação de causa e efeito entre Y e X , pois, se $\beta_1 > 0$, isto é, se este parâmetro for positivo, significa que Y e X são diretamente proporcionais (o aumento dos valores Y implica no aumento dos valores de X , e vice-versa, ou a diminuição nos valores Y resulta na redução dos valores de X , e vice-versa), caso contrário, Y e X serão inversamente proporcionais, o que implica em $\beta_1 < 0$, portanto, assumindo um valor negativo.

$$Y_i = \beta_0 \pm \beta_1 X_i. \quad (3.1)$$

A equação estatística denominada como modelo de regressão é um processo matemático pelo qual se deriva os parâmetros β_0 e β_1 de uma função $f(X) = Y$. Estes parâmetros β_0 e β_1 que são o coeficiente linear ou intercepto e, o coeficiente angular que determinam as características de linearidade (equação do primeiro grau) e inclinação (ângulo), respectivamente, sobre a reta de regressão estimada pela função que relaciona Y , a variável dependente ou resposta, com X a variável independente, onde esta última a princípio é considerada sem erro de medida, enquanto, o erro de previsão do modelo de regressão é medido apenas sobre Y a partir da função $f(X)$, segundo a expressão $\hat{e}_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

* Colosimo, E. A. Estatística II: Correlação e Regressão Linear Simples. Departamento de Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: https://www.est.ufmg.br/ênicoc/pdf/EstatisticaII/aula9-10_corr-reg.pdf. Acesso em 24/04/2026.

Devido a esperança matemática ou média de uma variável aleatória também representa um valor esperado para uma específica característica numérica, e ainda, como no modelo de regressão a variável Y possui valores que dependem da variável X , que por sua vez, explica toda variabilidade associada à variável resposta Y , assim, é possível indicar o modelo de regressão linear simples pela Equação (3.2).

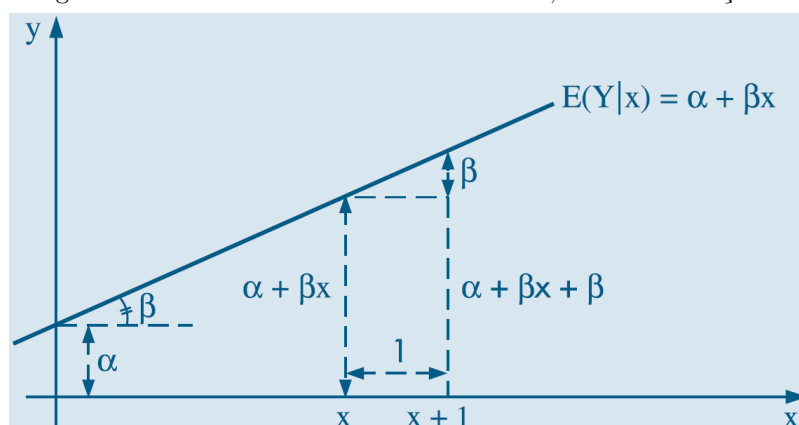
$$\begin{aligned} E[Y | X = x_i] &= \sum_{j=1}^m Y_j \times P[Y = y_j | X = x_i] \\ &= \mu(x) \\ &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + e_i = \hat{Y}_i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Assim, dentre os principais objetivos dos modelos de regressão se pode citar:

- Verificar estatisticamente se existe uma provável associação (correlação) entre as variáveis Y e X .
- Representar mediante uma equação ou modelo estatístico possível relação de causa e efeito existente pela variável Y em função de X .
- A partir da comprovação de relação diretamente ou inversamente proporcional da variável Y em função de X , utilizar o modelo para realizar previsões e tentar descobrir o valor de Y .

Para um modelo de regressão linear simples, tal como, a Equação (3.1), há apenas uma variável X , mas pode existir mais de uma variável independente associada com Y , o que poderá resultar num modelo de regressão linear múltiplo. Logo, o modelo linear é representado por uma linha (crescente ou decrescente) denominada reta de regressão (ver, a Figura 3.1), onde esta reta explica em média de forma geral a relação linear entre X e Y , sendo $\alpha = \beta_0$ e $\beta = \beta_1$, em comparação à Equação (3.1).

Figura 3.1 - Reta de regressão linear estimada às variáveis Y e X , mediante relação teórica de causa e efeito.



Fonte: Bussab e Morettin (2024).

3.3 - Estimador Paramétrico do Modelo de Regressão Linear Simples

Seja o modelo de regressão linear simples estimado para prevê (descobrir) o valor da variável Y , a partir da Equação (3.2), neste contexto, os estimadores para o coeficiente linear (β_0) e angular (inclinação da reta de regressão) (β_1), são definidos como apresentado a seguir.

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + \varepsilon_i$$

onde, $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são os parâmetros populacionais estimados, para o coeficiente linear (β_0) e angular (β_1), obtidos respectivamente, mediante as Equações (3.3) e (3.4).

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}; \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i \times \sum_{i=1}^n Y_i}{n} \right)}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}{n}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde, $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$: Média amostral da variável Y ; $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$: Média amostral da variável X ;

$\sum_{i=1}^n Y_i = y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n$: Somatório de $i = 1; 2; \cdots; n$, em relação à variável Y ;

$\sum_{i=1}^n X_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n$: Somatório de $i = 1; 2; \cdots; n$, em relação à variável X ;

$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = (x_1 \times y_1) + (x_2 \times y_2) + \cdots + (x_n \times y_n)$: Somatório de $i = 1; \cdots; n$, em relação à $x_i \times y_i$;

$\sum_{i=1}^n X_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2$: Somatório de $i = 1; 2; \cdots; n$, em relação aos valores x_i^2 .

3.3.1 - Método de Mínimos Quadrados para Estimar Parâmetros na Regressão

Sejam as variáveis \mathbf{Y} , \mathbf{X}_k e ε_n , além dos parâmetros β_k , como sendo vetores aleatórios. É possível obter $n > k$ observações, e ainda, X_{ij} indica a i -ésima observação ou nível da variável X_j . Neste sentido, se torna possível escrever estas variáveis sob a forma descrita na Equação (3.5).

$$Y_i = g_i(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_r) + \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.5)$$

onde $g_i(\cdot)$ são funções conhecidas e os números reais $\beta_1; \beta_2; \beta_3; \dots; \beta_r$, são os parâmetros desconhecidos. Fazendo ainda uma suposição adicional, que os ε'_s satisfazem (ao menos de forma aproximada), possuírem média igual a zero, variância constante e serem independentes entre si, como pode ser observado nas Equações (3.6 a 3.8).

$$E(\varepsilon_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n; \quad (3.6)$$

$$Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 > 0, \quad 1 \leq i \leq n; \quad (3.7)$$

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.8)$$

Apesar de σ^2 também ser um parâmetro, o método de Mínimos Quadrados é aplicável apenas nos parâmetros de interesse, ou seja, $\beta_0; \beta_1; \beta_2; \beta_3; \dots; \beta_r$ e, é amplamente utilizado quando a especificação do modelo, além das suposições feitas anteriormente, é de grande complexidade. O estimador de Mínimos Quadrados $(\hat{\beta}_0; \hat{\beta}_1; \hat{\beta}_2; \hat{\beta}_3; \dots; \hat{\beta}_k)$, dos parâmetros de interesse, é o valor que minimiza a soma de quadrados dos erros que é apresentada na Equação (3.9), neste sentido, equivalente a $Minimizar[S(\beta)]$ seguindo os passos descritos a seguir.

Passo 1: Escrever o modelo de regressão em função dos seus erros de previsão (ε_i);

Passo 2: Realizar a soma de quadrado dos erros de previsão $S(\beta) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ do modelo de regressão;

Passo 3: Calcular a derivada $\partial S(\beta)$ sobre a função da soma de quadrado dos erros de previsão;

Passo 4: Determinar a derivada parcial em relação a cada um dos parâmetros β_i ($i = 0; 1; \dots; k$), a partir da derivada sobre a soma de quadrado dos erros de previsão do modelo de regressão;

Passo 5: Maximizar a função $\partial S(\beta)$ igualando à zero cada resultado das derivadas parciais em relação aos parâmetros β_i ($i = 0; 1; \dots; k$), respectivamente, e assim, minimizar a soma de quadrados dos erros de previsão encontrando os estimadores de mínimos quadrados para $\hat{\beta}_0; \hat{\beta}_1; \hat{\beta}_2; \dots; \hat{\beta}_k$.

Obtenção dos estimadores de mínimos quadrados β_0 e β_1 , no modelo de regressão linear simples.

$$\begin{aligned}
 S(\beta) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n [Y_i - g_i(\beta_1; \beta_2; \beta_3; \dots; \beta_k)]^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n [Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k)]^2 \\
 \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_0} &= 2 \times \left\{ \sum_{i=1}^n [Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2 - \dots - \beta_k X_k] \times (-1) \right\} \therefore \text{Resultado para } \beta_0. \\
 \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_1} &= 2 \times \left\{ \sum_{i=1}^n [Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2 - \dots - \beta_k X_k] \times (-X_i) \right\} \therefore \text{Resultado para } \beta_1. \\
 \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_2} &= 2 \times \left\{ \sum_{i=1}^n [Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2 - \dots - \beta_k X_k] \times (-X_i) \right\} \therefore \text{Resultado para } \beta_2. \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_k} &= 2 \times \left\{ \sum_{i=1}^n [Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2 - \dots - \beta_k X_k] \times (-X_i) \right\} \therefore \text{Resultado para } \beta_k. \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} &= 0 \therefore \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_0} = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_0; \quad \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_1} = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_1; \quad \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_2} = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_2; \dots; \quad \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_k} = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_0} &= 0 \Rightarrow 2 \times \left\{ \sum_{i=1}^n [Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i] \times (-1) \right\} = 0 \\
 &= - \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i = 0 \Rightarrow n \hat{\beta}_0 = \sum_{i=1}^n Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i \\
 \Rightarrow \hat{\beta}_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i}{n} \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \hat{\beta}_1 \times \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_1} &= 0 \Rightarrow 2 \times \left\{ \sum_{i=1}^n [Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i] \times (-X_i) \right\} = 0 \Rightarrow - \sum_{i=1}^n Y_i X_i + \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0 \\
 \Rightarrow \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 &= \sum_{i=1}^n Y_i X_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i X_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}) (Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}.
 \end{aligned}$$

3.3.2 - Método de Máxima Verossimilhança para Estimar Parâmetros na Regressão

Definição 3.3.1. O Estimador de Máxima Verossimilhança (EVM) de um parâmetro θ é o valor do espaço paramétrico correspondente à $\hat{\theta} \in \Theta$, o qual maximiza a função de verossimilhança $L(\theta; \mathbf{x})$, apresentada na Equação (3.10), condensando (juntando) toda a informação contida na amostra da variável aleatória em uma única quantidade, o que maximiza a chance desta amostra vir a ocorrer.

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x|\theta) \quad (3.10)$$

Deve-se adotar como estimador o valor de θ que torne a amostra observada a mais provável de ocorrer.

Passos para encontrar um estimador de máxima verossimilhança, a partir de uma amostra aleatória observada mediante uma população pré-definida.

Passo 1: Encontrar a função de verossimilhança $L(\theta; \mathbf{x})$, a partir de uma amostra aleatória;

Passo 2: Calcular o Logaritmo $l(\theta; \mathbf{x})$ sobre a função de verossimilhança encontrada no Passo 1;

Passo 3: Aplicar a derivada $\partial l(\theta; \mathbf{x})$ sobre o logaritmo da função de verossimilhança do Passo 2;

Passo 4: Determinar a derivada parcial em relação a cada um dos parâmetros β_i ($i = 0; 1; \dots; k$), a partir da derivada sobre logaritmo da função de verossimilhança calculada no Passo 3;

Passo 5: Maximizar a função $\partial l(\theta; \mathbf{x})$ igualando à zero cada resultado das derivadas parciais em relação aos parâmetros β_i ($i = 0; 1; \dots; k$), respectivamente, e assim, tornando a amostra observada com maior probabilidade de ocorrer segundo os estimadores: $\hat{\beta}_0; \hat{\beta}_1; \hat{\beta}_2; \dots; \hat{\beta}_k$.

- **Obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança β_0 e β_1 , a partir de um modelo de regressão linear simples.**

Demonstração 3.3.1. Seja $y_1; y_2; \dots; y_n$ uma amostra aleatória de tamanho “ n ” da variável aleatória $Y \sim Normal(\beta_0 + \beta_1 x_i; \sigma^2)$. Portanto, a função densidade de probabilidade de Y será dada pela Equação (3.11).

$$f(Y|\beta_0 + \beta_1 x_i; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\frac{[y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)]^2}{2\sigma^2}} \quad (3.11)$$

Portanto, a função de verossimilhança para estimar os parâmetros β_0 e β_1 será descrita a partir da Equação (3.10), mediante aplicação sobre a função densidade de probabilidade da variável aleatória Y com distribuição Normal, que é dada na Equação (3.11), sendo assim representada por:

$$\begin{aligned}
L(\theta; \mathbf{y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\frac{(y_1 - \beta_0 - \beta_1 x_1)^2}{2\sigma^2}} \times \cdots \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\frac{(y_n - \beta_0 - \beta_1 x_n)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \times e^{-\left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2} \right]} \\
l(\theta; \mathbf{y}) &= \log \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \right\} + \log \left\{ e^{-\left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2} \right]} \right\} \\
l(\theta; \mathbf{y}) &= n \times \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2} \\
l(\theta; \mathbf{y}) &= [n \times \log(1)] - \left[n \times \log \left(\sqrt{2\pi\sigma^2} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2} \\
l(\theta; \mathbf{y}) &= [n \times \log(1)] - \left[n \times \log \left(\sqrt{2\pi\sigma^2} \right) \right] - \frac{1}{2\sigma^2} \times \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \\
\partial l(\theta; \mathbf{y}) &= 0 - 0 - \frac{1}{2\sigma^2} \times 2 \times \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \\
\frac{\partial l(\theta; \mathbf{y})}{\partial \beta_0} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \times 2 \times \left(\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \times (-1) \right) \therefore \text{resultado da derivada para } \beta_0 \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \times \left(-\sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n \beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i \right) = -\frac{1}{\sigma^2} \times \left(-\sum_{i=1}^n y_i + n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i \right) \\
\frac{\partial l(\theta; \mathbf{y})}{\partial \beta_0} &= 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sigma^2} \times \left(-\sum_{i=1}^n y_i + n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0 \therefore \text{igual a zero e maximiza função} \\
&\Rightarrow -\sum_{i=1}^n y_i + n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow n\hat{\beta}_0 = \sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i \\
&\Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - \frac{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i}{n} \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ é o Estimador de Máxima Verossimilhança para β_0 , que representa o coeficiente linear, intercepto ou termo independente do modelo de regressão linear que pode ser obtido a partir da Equação (3.11), por se tratar da média da variável aleatória Y que segue uma distribuição Normal.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\theta; \mathbf{y})}{\partial \beta_1} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \times 2 \times \left(\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \times (-x_i) \right) \therefore \text{resultado da derivada para } \beta_1 \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \times \left(-\sum_{i=1}^n y_i x_i + \beta_0 \sum_{i=1}^n x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\
\frac{\partial l(\theta; \mathbf{y})}{\partial \beta_1} &= 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sigma^2} \times \left(-\sum_{i=1}^n y_i x_i + \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = 0 \\
\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i \hat{\beta}_1 \\
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \therefore \text{forma 1 de estimar } \beta_1 \\
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta}_1 \bar{X} \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) (Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \therefore \text{forma 2 de estimar } \beta_1.
\end{aligned}$$

Desta forma, $\hat{\beta}_1$ representado pela **forma 1 de estimar** β_1 ou **forma 2 de estimar** β_1 são o Estimador de Máxima Verossimilhança para β_1 , possibilitando identificar a partir de uma amostra aleatória a constante de proporcionalidade sobre a variável independente X do modelo de regressão, que também equivale ao coeficiente angular ou nível de inclinação da reta estimada (média) do modelo de regressão linear, neste caso calculado a partir da Equação (3.11), onde, a variável resposta Y segue uma função densidade de probabilidade Normal com média equivalente a equação de regressão linear.

Exemplo 3.3.1. Sejam os dados referentes a uma fábrica de componentes eletrônicos para computadores, onde se observa na Tabela (3.1), a quantidade de itens produzidos (Y) aferida em termos absolutos e, o número de funcionários (X) operando os equipamentos que produzem os componentes, sendo que para cada par de valores ($Y_i; X_i$), onde $i = 1; 2; \dots; 10$, se tem a indicação da quantidade produzida *versus* o número de funcionários trabalhando em cada turno registrado aleatoriamente. Estimar o modelo de regressão linear que possibilite prever a quantidade de componentes eletrônicos produzidos por esta fábrica, mediante o número de funcionários trabalhando em um turno qualquer.

Tabela 3.1 - Exemplo para obtenção dos parâmetros do modelo de regressão linear.

Turno de Trabalho	X	Y	$X \times Y$	X^2	$(X_i - \bar{X})^2$	$(X_i - \bar{X}) \times (Y_i - \bar{Y})$
1	30	430	12.900	900	9	150
2	21	335	7.035	441	36	270
3	35	520	18.200	1.225	64	1.120
4	42	490	20.580	1.764	225	1.650
5	37	470	17.390	1.369	100	900
6	20	210	4.200	400	49	1.190
7	08	195	1.560	64	361	3.515
8	17	270	4.590	289	100	1.100
9	35	400	14.000	1.225	64	160
10	25	480	12.000	625	4	-200
Total	270	3.800	112.455	8.302	1.012	9.855

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

Mediante os dados disponíveis na Tabela (3.1), se deve utilizar as Equações (3.3) e (3.4), respectivamente, para estimar o coeficiente linear e o coeficiente angular do modelo de regressão. Contudo, devido essas equações dependerem da média amostral de X e Y , se faz necessário calcular os resultados:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{270}{10} = 27; \quad \text{e} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = \frac{3800}{10} = 380.$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{9.855}{1.012} = \mathbf{9,74}.$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 380 - [9,74 \times (27)] = 380 - 262,98 = \mathbf{117,02}.$$

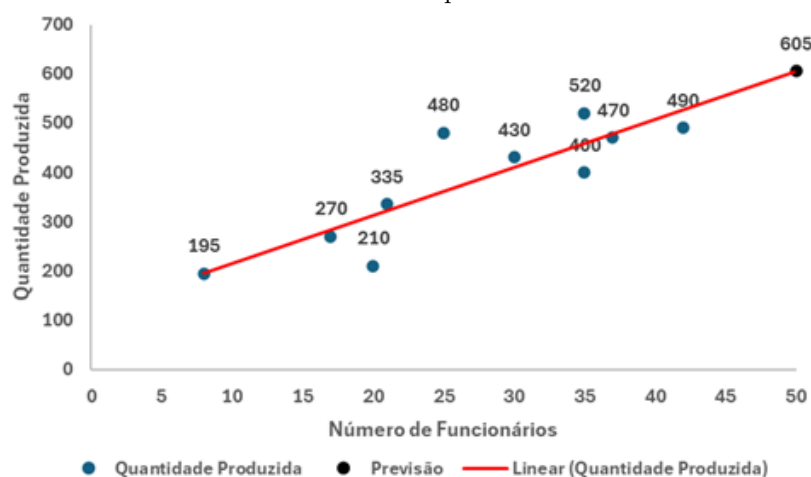
Neste sentido, com os resultados numéricos (estimativas pontuais) dos estimadores dos coeficientes linear e angular do modelo de regressão, se torna possível prever a quantidade de componentes eletrônicos produzidos em função do número de funcionários da fábrica em um turno de trabalho qualquer, durante o processo de produção como observado na Equação (3.12).

$$\hat{Y} = 117,02 + 9,74(X) \quad (3.12)$$

Assim, o modelo de regressão linear simples ajustado é representado pela Equação (3.12), onde se torna possível identificar que $\hat{\beta}_1 = 9,74$, indica que, $\hat{\beta}_1 > 0$ e, portanto, as variáveis Y e X possuem uma relação de causa e efeito direta, o que implica numa relação estatística diretamente proporcional entre estas variáveis, onde o aumento do número de funcionários, implica diretamente no aumento da produção de componentes eletrônicos aferida em um mesmo turno de trabalho da fábrica e, de forma análoga, a diminuição no número de trabalhadores resultará numa menor quantidade produzida de componentes eletrônicos. Em termos práticos, supondo que o número de funcionários trabalhando na fábrica seja igual a 50, qual quantidade de itens serão produzidos em um mesmo turno de trabalho?

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= 117,02 + 9,74 \times (50) = 117,02 + 487 \\ &= 604,02 \cong 605 \text{ itens.} \end{aligned}$$

Figura 3.2 - Reta de regressão estimada para as variáveis quantidade produzida *versus* o número de funcionários em cada turno de trabalho numa fábrica de componentes eletrônicos.



Fonte: Elaborado pelo autor, mediante dados de Carvalho Jr. (2006).

A Figura 3.2 possibilita observar a equação de regressão estimada para quantidade produzida de componentes eletrônicos em função do número de funcionários da fábrica. Além disso, como o modelo foi capaz de prever para o caso de 50 funcionários comparecerem à fábrica a quantidade aproximada de 605 componentes produzidos, este valor corresponde a média (valor esperado) num turno de trabalho.

3.3.3 - Método Matricial para Estimação dos Parâmetros de Regressão

Com o objetivo de obter (encontrar) estimadores para os coeficientes (parâmetros populacionais desconhecidos) do Modelo de Regressão Linear Múltipla, dado pela Equação (3.2), se pode utilizar o método de Estimação de Mínimos Quadrados (EMQ), combinado com métodos matriciais ao considerar as variáveis Y , X_k e ε_n , além dos parâmetros β_k , como sendo vetores aleatórios. Desde que, seja possível obter $n > k$ observações, e ainda, X_{ij} represente a i -ésima observação ou nível da variável X_j , tal como, mostra a Tabela (3.2).

Tabela 3.2 - Dados de um Modelo de Regressão Linear Múltipla.

Y	X_1	X_2	\cdots	X_k
Y_1	X_{11}	X_{12}	\cdots	X_{1k}
Y_2	X_{21}	X_{22}	\cdots	X_{2k}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
Y_n	X_{n1}	X_{n2}	\cdots	X_{nk}

Fonte: Neter, et al. (1983).[†]

Supondo que os erros de previsão (diferença entre cada valor real da variável resposta subtraído do valor estimado equivalente) obtidos pela Equação (3.2), são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (v.a.i.i.d.), seguindo uma função densidade de probabilidade Normal com média zero e variância σ^2 , ou seja, $E(\varepsilon) = 0$ e $Var(\varepsilon) = \sigma^2$. Mediante os termos das observações de X_{ij} , se torna possível reescrever a Equação (3.2), sob a forma de considerar um modelo de regressão linear múltipla, o qual passa a ser descrito com estrutural física segundo se tem na Equação (3.13).

$$\begin{aligned}
 Y_i &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon_i, \\
 &= \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Porém, torna-se mais prático e fácil resolver equações normais, sobretudo, para modelos de regressão linear múltipla que possuem “ k ” variáveis aleatórias independentes via métodos matriciais, visto que, para o modelo de regressão linear múltipla existem estruturas matriciais equivalentes às equações normais, onde é possível representar matricialmente o modelo de regressão pela Equação (3.14).

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{3.14}$$

onde, cada variável do modelo de regressão é expresso matricialmente como dado na Equação (3.23).

[†] Neter, J., Wasserman, W. e Kutner, M. H. (1983), Applied linear regression models, Richard D. Irwin Inc, Homewood, Illinois.

$$\mathbf{Y}_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; \mathbf{X}_{(n \times P)} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta}_{(k \times 1)} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Frequentemente, \mathbf{Y} é um vetor de ordem $n \times 1$ de observações, \mathbf{X} é uma matriz de ordem $n \times P$ dos níveis das variáveis independentes, visto que, $P = k + 1$, porém $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor de ordem $k \times 1$ dos coeficientes de regressão e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um vetor de ordem $n \times 1$ dos resíduos (erros) aleatórios. O objetivo do estimador de mínimos quadrados é obter o vetor $\boldsymbol{\beta}$ que minimize a soma de quadrados dos erros, assim se chega ao resultado da Equação (3.16).

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2, \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}' \times \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \times (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

No entanto, o vetor \mathbf{L} pode ser reescrito da seguinte forma da Equação (3.17).

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{Y}' \times \mathbf{Y}) - (\boldsymbol{\beta}' \times \mathbf{X}' \times \mathbf{Y}) - (\mathbf{Y}' \times \mathbf{X} \times \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta}' \times \mathbf{X}' \times \mathbf{X} \times \boldsymbol{\beta}) \\ &= (\mathbf{Y}' \times \mathbf{Y}) - 2 \times (\boldsymbol{\beta}' \times \mathbf{X}' \times \mathbf{Y}) + (\boldsymbol{\beta}' \times \mathbf{X}' \times \mathbf{X} \times \boldsymbol{\beta}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

em virtude de que, $(\boldsymbol{\beta}' \times \mathbf{X}' \times \mathbf{Y})$ representa um escalar, ou seja, é uma matriz de ordem (1×1) , e consequentemente a sua transposta $(\mathbf{Y}' \times \mathbf{X} \times \boldsymbol{\beta})$ representa o mesmo escalar. Assim os estimadores dos parâmetros devem satisfazer a condição de maximização estabelecida na Equação (3.18).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= -2 \times (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}) + 2 \times (\mathbf{X}' \times \mathbf{X} \times \hat{\boldsymbol{\beta}}) = 0, \\ &= (\mathbf{X}' \times \mathbf{X} \times \hat{\boldsymbol{\beta}}) - (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}) = 0 \\ \Rightarrow (\mathbf{X}' \times \mathbf{X} \times \hat{\boldsymbol{\beta}}) &= (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

A partir da Equação (3.18) tem-se as equações normais de mínimos quadrados, e como a intenção é obter um estimador para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$, deve-se multiplicar em ambos os membros a Equação (3.18), por $(\mathbf{X}' \times \mathbf{X})^{-1}$, ou seja, pela matriz inversa de $(\mathbf{X}' \times \mathbf{X})$, portanto, o estimador de mínimos quadrados é determinado segundo a Equação (3.19), em termos matriciais.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}' \times \mathbf{X})^{-1} \times (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}). \quad (3.19)$$

Neste contexto, o modelo de regressão estimado (ajustado), sob a forma matricial é representado pela Equação (3.20), onde, $\hat{\mathbf{Y}}$ representa um vetor coluna aleatório com “ n ” linhas; \mathbf{X} é um vetor com “ n ” linhas e P colunas; $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é um vetor coluna aleatório com “ k ” linhas, tal que, “ k ” é igual ao número de variáveis aleatórias independentes, acrescido de 1 (uma) unidade equivalente ao termo independente (intercepto) do modelo de regressão. Logo, se o modelo de regressão possui 3 (três) variáveis independentes: $X_1; X_2; X_3$, isso implica que, $k = 3 + 1 = 4$ parâmetros, isto é, $\beta_0; \beta_1; \beta_2; \beta_3$.

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X} \times \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (3.20)$$

O modelo de regressão estimado (ajustado) na forma escalar é representado segundo a Equação (3.21).

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j X_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.21)$$

Mediante a Equação (3.21) é possível obter o resíduo (erro), fazendo a diferença entre o valor observado Y_i e o valor ajustado \hat{Y}_i , ou seja, $\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$. O vetor dos erros que é uma matriz de ordem $n \times 1$ é representado de acordo com a Equação (3.22).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}. \quad (3.22)$$

Exemplo 3.3.2. Os proprietários de uma indústria metalúrgica desejam monitorar/controlar o consumo de energia elétrica necessária para produzir peças mecânicas de automóveis utilitários. Desta forma, se apresentam na Tabela (3.3) os registros num período de uma semana (cinco dias) do consumo de energia elétrica nas duas linhas de produção existentes na referida indústria automotiva.

Tabela 3.3 - Consumo de energia elétrica em quilowatt-hora de uma indústria metalúrgica durante cinco dias de funcionamento, em função do tempo (horas) que cada uma das duas linhas de produção existentes na referida indústria ficam funcionando para produzir as peças automotivas.

Dia registrado	Y (Consumo de energia elétrica em quilowatt-hora (kWh))	X ₁ (Horas de funcionamento da linha de produção 1)
1	35.000	08
2	57.000	09
3	94.000	11
4	78.000	10
5	87.000	12

Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Cancho (2010)*.

Nota 3.3.1. *Cancho, V., 2010. Notas de aulas sobre noções de estatística e probabilidade - São Paulo: USP.

a) Escrever os dados das variáveis da Tabela (3.3) na forma de matrizes como na Equação (3.23).

$$\mathbf{Y}_{(5 \times 1)} = \begin{bmatrix} 35.000 \\ 57.000 \\ 94.000 \\ 78.000 \\ 87.000 \end{bmatrix}; \mathbf{X}_{(5 \times 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 08 \\ 1 & 09 \\ 1 & 11 \\ 1 & 10 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

b) Estimar os parâmetros do modelo de regressão segundo a Equação (3.19) para $\hat{\beta}$.

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (\mathbf{X}' \times \mathbf{X})^{-1} \times (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}). \\ \mathbf{X}'_{(3 \times 5)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 08 & 09 & 11 & 10 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{X}' \times \mathbf{X})_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} 5 & 50 \\ 50 & 510 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow (\mathbf{X}' \times \mathbf{X})^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{51}{5} & -1 \\ -1 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}; (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y})_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} 351.000 \\ 3.651.000 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} -70.800 \\ 14.100 \end{bmatrix}.$$

$$\hat{Y} = -70.800 + 14.100 (X_1). \quad (3.23)$$

c) Diante dos parâmetros estimados no item b) e, do modelo de previsão (Equação 3.23) obtido para \hat{Y} . Qual será o consumo de energia elétrica da referida indústria metalúrgica, caso a linha de produção 1 fique em funcionamento por um período de 15 (quinze) horas ininterruptas e, se a linha de produção 2 adotar o mesmo regime de funcionamento, devido a produção se destinar a atender uma demanda por quantidade específica de peças automotivas em caráter de urgência?

$$\hat{Y} = -70.800 + 14.100(15) = \mathbf{140.700 \text{ kWh}}.$$

Portanto, segundo o modelo de regressão linear simples, caso a indústria funcione por 15 horas ininterruptas, o consumo médio de energia elétrica será de 140.700 kWh. Esse resultado pode ajudar/auxiliar os administradores ou proprietários desta indústria para avaliar se o tempo de utilização dos equipamentos irá compensar a quantidade de peças que podem vir a ser produzidas, em face do custo total gasto com energia elétrica que será consumida em um único dia pela indústria de peças automotivas.

3.4 - Teste de Hipóteses dos Parâmetros do Modelo de Regressão Linear Simples

Admite-se, portanto, que a Equação (3.12), como sendo um modelo de regressão linear adequado para representar a relação entre as variáveis X e Y da Tabela (3.1), mesmo que de maneira experimental. Assim, se deve proceder com uma verificação da adequação deste modelo. As propriedades estatísticas dos estimadores de mínimos quadrados $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ possibilitam totais condições de verificação dessa adequação. Os estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são variáveis aleatórias, pois, são combinações lineares dos $Y_{i's}$, os quais são variáveis aleatórias, como pode ser observado detalhadamente em Hoffmann (2015).[‡]

Para que um estimador seja considerado capaz de substituir significativamente o parâmetro populacional desconhecido, o mesmo deve convergir em média para o próprio parâmetro, ou seja, $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$ e $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$. Logo, se garante dessa forma que $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são estimadores não viciados para β_0 e β_1 respectivamente. Ainda, $\hat{\sigma}^2 = \frac{SQE}{n-2} \equiv QME$, então, o quadrado médio dos erros (QME) de forma equivalente é um estimador não-viciado para σ^2 . Supondo que se deseja testar as hipóteses da Equação (3.24), sob a condição inicial que a inclinação da reta de regressão (β_1), seja nula e consequentemente não exista relação entre as variáveis em estudo, as hipóteses a serem testadas são:

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\beta}_1 = 0 \\ H_1 : \hat{\beta}_1 \neq 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

onde, mediante a hipótese alternativa (H_1) verifica-se que este teste é *bilateral*, ou seja, caso se rejeite H_0 , se tem duas implicações possíveis para o parâmetro de inclinação, o qual poderá ser *menor que zero* (relação inversa entre Y e X) ou *maior que zero* (relação direta entre Y e X). Assim, como resultado imediato da hipótese de normalidade de $\hat{\beta}_1$ tem-se a estatística de teste dada pela Equação (3.25),

$$t_0[\hat{\beta}_1] = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{QME}{S_{XX}}}}, \quad (3.25)$$

sendo, t_0 segue uma distribuição t - *Student*, com $n - 2$ graus de liberdade, distribuição a qual é aplicável à pequenas amostras onde a variância populacional é desconhecida. A partir da Equação (3.24), a hipótese nula a ser testada é $H_0 : \hat{\beta}_1 = \beta_1$, ou seja, supondo que não exista regressão entre

[‡] Hoffmann, R. Análise de regressão: uma introdução à econometria [recurso eletrônico] / Rodolfo Hoffmann. - Piracicaba: ESALQ/USP, 2015. Disponível em: <https://repositorio.usp.br/bitstream/handle/BDPI/48616/REGRESS.pdf?sequence>. Acesso em 19/05/2026.

as variáveis em estudo, chega-se à $H_0 : \hat{\beta}_1 = 0$. A regra de decisão para o teste de significância do coeficiente angular será de rejeitar $H_0 : \hat{\beta}_1 = 0$, caso a Equação (3.26) seja verdadeira.

$$|t_0[\beta_1]| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}, \quad (3.26)$$

onde, t_0 é o valor calculado da estatística de teste pela Equação (3.25); ainda, $t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}$ é o valor crítico ou tabela da distribuição $t - Student$, tal que, α representa o nível significância (ou erro tipo I do teste estatístico), com o qual se deseja realizar o teste, podendo ser igual a 1%, 2%, 5%, por exemplo, valor o qual é complementar ao coeficiente de confiança “ γ ” no mesmo teste, logo, quanto menor o valor de α , maior será o grau de confiança do teste é realizado, em virtude de $\gamma = 1 - \alpha$.

De maneira semelhante aos procedimentos realizados na Equação (3.24) e, pela Equação (3.25), para testar a significância do coeficiente angular do modelo de regressão linear ajustado, também se deve proceder em relação ao termo independente do modelo que é o coeficiente linear estimado $\hat{\beta}_0$. Então, se deve testar as hipóteses da Equação (3.27).

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\beta}_0 = 0 \\ H_1 : \hat{\beta}_0 \neq 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

portanto, como implicação imediata da hipótese de normalidade de β_0 , se tem a Equação (3.28) como estatística de teste para $\hat{\beta}_0$,

$$t_0[\hat{\beta}_0] = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{QME \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}} \right]}}, \quad (3.28)$$

onde, t_0 segue uma distribuição $t - Student$, com $n - 2$ graus de liberdade.

A partir da Equação (3.27), como a hipótese nula testada se resume à $H_0 : \hat{\beta}_0 = \beta_0$, caso não exista o coeficiente linear no modelo ajustado, implica no intercepto ser igual a zero, se chegando a $H_0 : \hat{\beta}_0 = 0$. Neste contexto, a regra de decisão para o teste de significância do coeficiente linear implica em rejeitar $H_0 : \hat{\beta}_0 = 0$, caso a Equação (3.29) seja verdadeira, o que resulta de forma imediata no $\hat{\beta}_0$ fazer parte (integrar) o modelo de previsão, mas, se a hipótese H_0 da Equação (3.27) não for rejeitada, o modelo de regressão dado pela Equação (3.2), não terá o termo independente β_0 em sua estrutura física, o que implicará num modelo em que β_1 será uma constante de proporcionalidade sobre a preditora X .

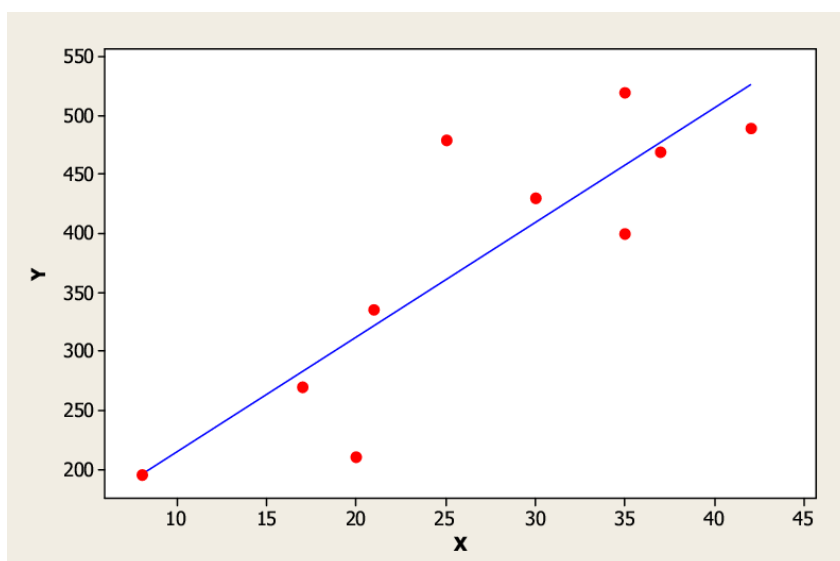
$$|t_0[\beta_0]| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}, \quad (3.29)$$

onde, t_0 é o valor calculado da estatística de teste a partir da Equação (3.28), α representa o nível

significância do teste $t - Student$, logo, $\alpha = 1 - \gamma$ e, n é o número de pares dos valores das variáveis Y e X . É conveniente relembrar que, o valor de α utilizado como nível de significância do teste t_0 , nada tem haver com o valor do intercepto (coeficiente linear) do modelo de regressão e sim é um valor tabelado da distribuição $t - Student$, para diversos níveis como 1%, 2%, etc.

Portanto, ao tomar a decisão de não rejeitar a hipótese H_0 da Equação (3.24), equivale a assumir que não existe relação linear entre as variáveis X e Y , ou seja, não existe regressão entre estas duas variáveis, logo, o modelo de regressão linear não é adequado para representar a relação entre X e Y . No entanto, se H_0 for rejeitada, implica que a variável X consegue capturar (explicar) a variabilidade de Y (variável resposta) e, que o modelo de regressão linear é capaz de representar a relação entre as variáveis em estudo, tal como, pode ser observado que é alcançado pelos dados da Tabela (3.1) e que é representado pela Figura 3.3.

Figura 3.3 - Reta de Regressão Linear Ajustada para os dados da Tabela (3.1).



Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).
Minitab Statistical Software ®17.1.0 (student version) (2026).

3.5 - Análise de Variância (ANOVA) do Modelo de Regressão Linear Simples

Após o ajuste do modelo de regressão mediante a estimação dos parâmetros, tal como, foi observado na Equação (3.12), se faz absolutamente necessário testar a significância da regressão realizando uma Análise de Variância (ANOVA) do referido modelo (Ver, Neter, et al. 1983)[§], como é apresentado na Tabela (3.4), a qual faz um teste global do modelo de regressão que foi ajustado. Caso se queira testar individualmente a significância dos parâmetros do modelo de regressão, se deve utilizar as Equações (3.25) e (3.28), para $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_0$, respectivamente, adotando as estatísticas mediante o teste *t-Student*.

Tabela 3.4 - Análise de Variância para um Modelo de Regressão Linear Simples.

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado Médio	F_0
Regressão	$SQR = \hat{\beta}S_{XY}$	1	$QMR = \frac{SQR}{1}$	$\frac{QMR}{QME}$
Erros (Resíduos)	$SQE = S_{YY} - \hat{\beta}S_{XY}$	$n - 2$	$QME = \frac{SQE}{n - 2}$	
Total	$SQT = SQR + SQE$	$n - 1$		

Fonte: Bussab e Morettin (2024).

Para o modelo de regressão representado pela Equação (3.12) obtido a partir dos dados da Tabela (3.1), tem-se que, para testar a significância de $\hat{\beta}_1$, ou seja, $H_0 : \hat{\beta}_1 = 0$ contra $H_1 : \hat{\beta}_1 \neq 0$, a um nível de significância (α) de 10%, utilizando a Equação (3.25), chega-se à $t_0[\hat{\beta}_1] = 4,75$. Como $t_{\frac{\alpha}{2};8} = 1,860$, e, o valor calculado da estatística $t_0[\hat{\beta}_1]$ é maior que o referido valor de t tabelado (1,860), se toma a decisão de rejeitar a hipótese H_0 , pois, se conclui que $\hat{\beta}_1 \neq 0$ e, então, existe regressão entre as variáveis, ou seja, ao nível de significância $\alpha = 10\%$, o coeficiente angular do modelo de regressão ajustado é estatisticamente diferente de zero, o que comprova a relação causa e efeito entre Y e X .

Quanto à $\hat{\beta}_0$, se testa as hipóteses $H_0 : \hat{\beta}_0 = 0$ versus $H_1 : \hat{\beta}_0 \neq 0$, ao nível de significância (α) de 10%, utilizando a Equação (3.28), obtém-se $t_0[\hat{\beta}_0] = 1,98$. Como $t_{\frac{\alpha}{2};8} = 1,860$, ou seja, o valor da estatística $t_0[\hat{\beta}_0]$ é maior que o valor de t tabelado, toma-se a decisão de rejeitar H_0 , logo, se conclui que $\hat{\beta}_0 \neq 0$, ou seja, o intercepto (coeficiente linear) do modelo de regressão ajustado, ao nível de significância $\alpha = 10\%$ é estatisticamente diferente de zero. Para que se tenha um teste global do modelo de regressão linear ajustado, o qual é representado pela Equação (3.12), se constrói uma tabela

[§] Neter, J., Wasserman, W. e Kutner, M. H. (1983), Applied linear regression models, Richard D. Irwin Inc, Homewood, Illinois.

de análise de variância (ANOVA), com o intuito de comprovar a total adequação dos dados do modelo de regressão em termos de variabilidade da reta estimada e dos erros de previsão obtidos (Tabela 3.5).

Tabela 3.5 - ANOVA do Teste de Significância da Regressão para os dados da Tabela (3.1).

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado Médio	F_0
Regressão	95.969	1	95.969	22, 59
Erros (Resíduos)	33.981	8	4.248	
Total	129.950	9		

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

Para que seja possível testar o modelo de regressão representado pela Equação (3.12), mediante a ANOVA, testa-se a significância de $\hat{\beta}_1$, ou seja, $H_0 : \hat{\beta}_1 = 0$ contra $H_1 : \hat{\beta}_1 \neq 0$, a um nível de significância (α) de 10%, com 1 grau de liberdade no numerador e 8 graus de liberdade no denominador, utilizando a equação de $F_0 = \frac{QMR}{QME}$, chega-se à $F_0(\hat{\beta}_1) = 22, 59$, como pode ser observado na Tabela (3.5). Portanto, se tem como valor crítico ou tabelado da distribuição F-Snedecor: $F_{10\%;1;8} = 3, 46$, ou seja, o valor da estatística $F_0(\hat{\beta}_1)$ é maior que o valor tabelado da distribuição F-Snedecor, logo toma-se a decisão de rejeitar H_0 , assim, conclui-se que $\hat{\beta}_1 \neq 0$, o que implica em uma adequação dos dados da Tabela (3.1) ao modelo de regressão linear simples, e portanto, a variável X está conseguindo capturar (expressar/representar) a variabilidade apresentada pela variável Y . Portanto, ao nível de significância $\alpha = 10\%$, se pode garantir que estatisticamente existe regressão entre X e Y .

3.6 - Coeficiente de Explicação ou Determinação

Ao analisar a reta de regressão na Figura 3.3, se observa que o par ordenado representado pelos pontos $(X_i; Y_i)$, estão distribuídos acima e abaixo da mesma, portanto, se relaciona cada ponto com o seu valor estimado (a reta de regressão) e com o valor médio de Y (reta paralela ao eixo X). Como se pode observar a diferença entre o valor de Y e o valor \bar{Y} (valor médio de Y) é o desvio total do ponto em relação a sua média. Torna-se possível obter o coeficiente de explicação (determinação) de um modelo de regressão ajustado, mediante a Equação (3.30).

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT}, \quad (3.30)$$

onde R^2 , geralmente é calculado em percentual, bastando para isto, multiplicar por 100 o resultado obtido na Equação (3.30). Porém, $SQR \leq SQT$ resultando em: $0 \leq R^2 \leq 1$, ou seja, $0\% \leq R^2 \leq 100\%$.

De forma equivalente, o coeficiente de explicação de um modelo de regressão linear simples, também pode ser definido como sendo o quadrado do coeficiente de correlação linear simples de Pearson. Neste contexto, a partir do valor calculado do coeficiente de explicação R^2 , se pode obter o valor do coeficiente de correlação linear simples de Pearson (r), pois, $\sqrt{R^2} = r$ e, vice-versa, isto é, se tem que $(r)^2 = R^2$.

Para o modelo de regressão ajustado aos dados da Tabela (3.1), ou seja, para a Equação (3.12), o coeficiente de determinação é $R^2 = 0,7396$, ou seja, aproximadamente 74%, já o coeficiente de correlação é igual à 0,86, aproximadamente, o que indica uma forte correlação positiva segundo a literatura científica. O coeficiente de explicação é sempre positivo, devido ser uma métrica obtida a partir de uma potência de segunda ordem, enquanto que, o coeficiente de correlação linear simples de Pearson, por medir associação inversa ou direta admitir valores negativos ou positivos, respectivamente.

O coeficiente de explicação indica o quanto em média a regressão explica o ajuste da reta, ou seja, o coeficiente de explicação determina o quanto da variabilidade da variável Y é explicada em função da variável X . Enquanto, o coeficiente de correlação representa uma medida de força e sentido da relação ou associação estatística entre as variáveis Y (resposta/dependente) e X (preditora/explicativa).

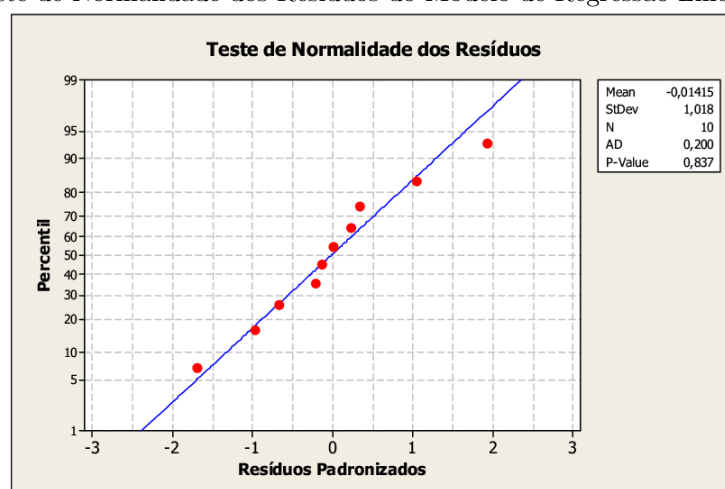
3.7 Análise dos Resíduos do Modelo de Regressão

Como forma de comprovação de todo e qualquer modelo de regressão ajustado a um conjunto de dados, deve-se proceder à avaliação da adequação do modelo de regressão (análise dos resíduos ou diagnóstico), visto que, ao se ajustar um modelo de regressão, não se pode afirmar que ele é um modelo apropriado, sem antes verificar se as suposições básicas do modelo foram satisfeitas. As suposições básicas do modelo de regressão são:

1. Os resíduos devem apresentar distribuição Normal.

A normalidade dos resíduos pode ser verificada mediante um teste de normalidade, como apresentado pela Figura (3.4), que foi aplicado aos dados da Tabela (3.1), onde, mediante um nível de significância (α), pré-estabelecido, por exemplo, 5%, a probabilidade de significância do teste (P -value), deve ser superior a α , para que se possa aceitar a hipótese, de que os resíduos seguem uma distribuição Normal, caso contrário, rejeita-se a hipótese de normalidade dos resíduos. Na Figura (3.4), verifica-se o P -value = 0,837, que é superior à 5%, ou seja, $\alpha = 0,05 < P$ -value = 0,837, logo, não se deve rejeitar a hipótese de normalidade dos resíduos ao nível de significância de 5%, resultando em resíduos que seguem uma distribuição Normal.

Figura 3.4 - Teste de Normalidade dos Resíduos do Modelo de Regressão Linear da Tabela (3.1).

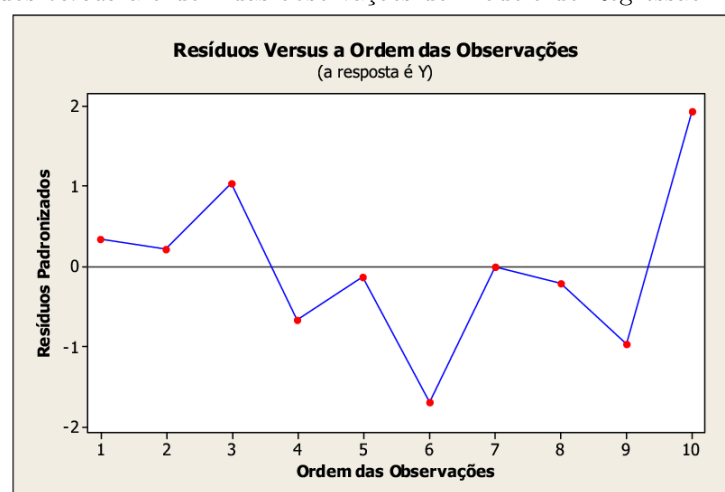


Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

Minitab Statistical Software ®17.1.0 (student version) (2026).

2. Os resíduos devem ser independentes.

Não deve existir correlação (associação) entre os erros produzidos pelo modelo de regressão ajustado. Essa condição pode ser verificada segundo um gráfico dos resíduos *versus* a ordem das observações, tal como, é mostrado pela Figura (3.5), para os dados da Tabela (3.1), bastando para isso, que os pontos (resíduos) presentes nesse gráfico se apresentem de maneira aleatória em torno da linha central, a qual representa o valor esperado (média) dos resíduos igual à zero, o que pode ser observado na referida figura que está ocorrendo de forma aproximada.

Figura 3.5 - Resíduos *versus* a ordem das observações do Modelo de Regressão Linear da Tabela (3.1).

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

Minitab Statistical Software ®17.1.0 (student version) (2026).

3.7.1 - Resíduos Autocorrelacionados: Teste Estatístico de Durbin-Watson

Como o diagnóstico de independência dos erros para o modelo de regressão linear simples é realizado mediante uma inspeção visual, segundo o gráfico dos resíduos *versus* a ordem das observações, adicionalmente é possível realizar um teste estatístico de significância sobre os erros de previsão, onde se avalia uma provável autocorrelação dos resíduos a partir de uma métrica de acurácia denominada teste de Durbin-Watson (Hoffmann, 2016). A Equação (3.32), possibilita calcular o valor da estatística de teste “ d ” (teste de Durbin-Watson), o que permite avaliar a significância das hipóteses de autocorrelação dos resíduos do modelo de regressão ajustado mediante a Equação (3.31).

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \text{ (os resíduos não são autocorrelacionados)} \\ H_1 : \rho > 0 \text{ (os resíduos são autocorrelacionados).} \end{cases} \quad (3.31)$$

De acordo com Hoffmann (2016), a distribuição de probabilidade da estatística “ d ” possui associação com o tamanho da amostra “ n ”, a qual quantifica o número de pares $(Y_i; X_i)$ que foram selecionados para ajustar um modelo de regressão linear, mas, também depende do número de parâmetros β_k que foram estimados à reta de regressão, além da matriz de variáveis preditoras \mathbf{X} que compõe o modelo.

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=2}^n e_t^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} + \frac{\sum_{t=2}^n e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} - 2 \times \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^n e_t^2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde, os e_t representam os erros de previsão da reta de regressão ajustados a um conjunto de dados pelo método de mínimos quadrados ordinários.

Regra de Decisão: A estatística “ d ” de Durbin-Watson possui valores críticos representados por: d_L e d_U , representando o limite inferior e limite superior, respectivamente. Caso $d < d_L$, o teste estatístico é significativo, isto é, se deve rejeitar a hipótese H_0 dada na Equação (3.31), admitindo ao nível de significância α pré-estabelecido (1%, 5% etc.), que os erros produzidos pelo modelo de regressão ajustado são autocorrelacionados. Se $d > d_U$, o teste estatístico não é significativo, o que implica em

não rejeitar a hipótese H_0 descrita na Equação (3.31), logo, os resíduos não são autocorrelacionados e tendo este resultado convergido ao que se espera dos resíduos de uma modelo de regressão. Quando $d_L < d < d_U$, o teste estatístico é inconclusivo, logo, não se pode tomar nenhuma decisão com relação a Equação (3.31), sendo necessário alterar o nível de significância para tomar uma decisão no teste.

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \text{ (os resíduos não são autocorrelacionados)} \\ H_1 : \rho < 0 \text{ (os resíduos são autocorrelacionados).} \end{cases} \quad (3.33)$$

Ainda segundo Hoffmann (2016), caso a hipótese alternativa do teste “ d ” de Durbin-Watson seja dada como na Equação (3.33), a tomada de decisão sofre alterações em comparação com a Equação (3.31), passando a considerar os seguintes valores críticos: $4 - d_L$ e $4 - d_U$, onde, se $d > (4 - d_L)$ o teste é significativo, se devendo rejeitar a hipótese H_0 e, concluindo pela autocorrelação dos resíduos; porém, quando $d < (4 - d_U)$, o teste não é significativo implicando na ausência de autocorrelação dos resíduos. Ainda, se o valor da estatística de Durbin-Watson pertencer ao intervalo $(4 - d_U) < d < (4 - d_L)$, o teste estatístico é inconclusivo, sendo necessário adotar um outro nível de significância α para que seja possível proceder com uma tomada de decisão no teste de avaliação da autocorrelação dos resíduos.

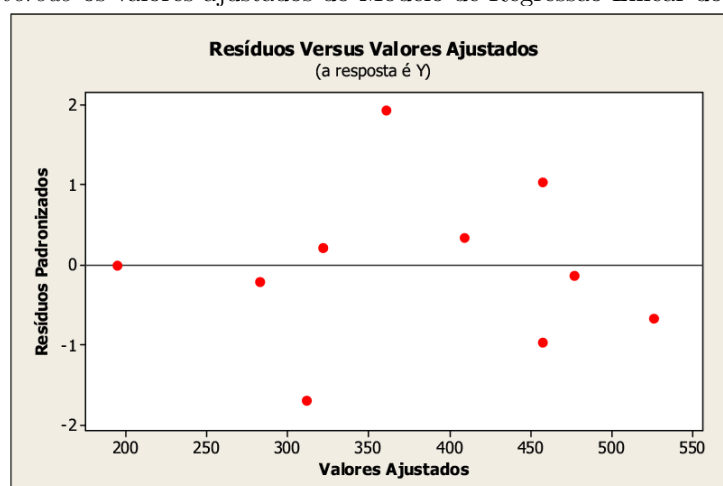
Exemplo 3.7.1. Aplicando a estatística de teste “ d ” de Durbin-Watson sobre os resíduos do modelo modelo de regressão linear simples para os dados da Tabela (3.1). Adotando um nível de significância $\alpha = 5\% = 0,05$, para um número de pares $n = 10$ e 2 (dois) parâmetros (β_0 e β_1), então, $k = 2$, assim, os valores críticos são: $d_L = 0,70$ e $d_U = 1,64$. Utilizando o *Minitab Statistical Software* ®17.1.0 (*student version*), foi possível obter o valor da estatística $d = 1,93797$, o que favorece a tomada de decisão do teste, pois, $d = 1,93797 > d_U = 1,64$, resultando um teste não significativo implicando em resíduos não autocorrelacionados, ao nível de significância de 5%. Portanto, segundo o teste de Durbin-Watson os resíduos do modelo de regressão ajustado para os dados da Tabela (3.1) são independentes entre si, tal como, se espera de um modelo de regressão.

Adicionalmente, caso se deseje aumentar o grau de confiança do teste estatístico reduzindo o valor de α , isto é, diminuindo a chance de cometer o erro tipo I no teste, o valor do nível de significância pode ser 1%. Os valores críticos serão iguais a: $d_L = 0,47$ e $d_U = 1,33$. A tomada de decisão anterior (à 5% de significância) não será alterada, devido $d = 1,93797 > d_U = 1,33$, ratificando a decisão de não rejeitar a hipótese nula como ocorreu para $\alpha = 5\%$. Logo, mesmo a um nível de significância de 1% se deve tomar a decisão de não rejeitar a hipótese que os resíduos não são autocorrelacionados, indo ao encontro do que se espera dos erros de um modelo de regressão serem independentes entre si.

3. Os resíduos devem ser Homocedásticos.

Os resíduos devem apresentar variância constante, isto é, os resíduos do modelo de regressão linear precisam ser homocedásticos. É possível verificar se essa condição de adequação do modelo de regressão está sendo atendida, a partir dos gráficos dos resíduos *versus* os valores ajustados (estimados mediante o modelo de regressão) e, pelo gráfico dos resíduos *versus* a variável preditora, necessitando para isso, que os pontos plotados no gráfico estejam dispostos (apresentados) de forma aleatória em torno da linha central (média zero), fato o qual pode ser observado nas Figuras (3.6) e (3.7), respectivamente, para os dados da Tabela (3.1), onde se constata a condição de variância constante sendo atendida, devido ao fato dos resíduos serem homocedásticos.

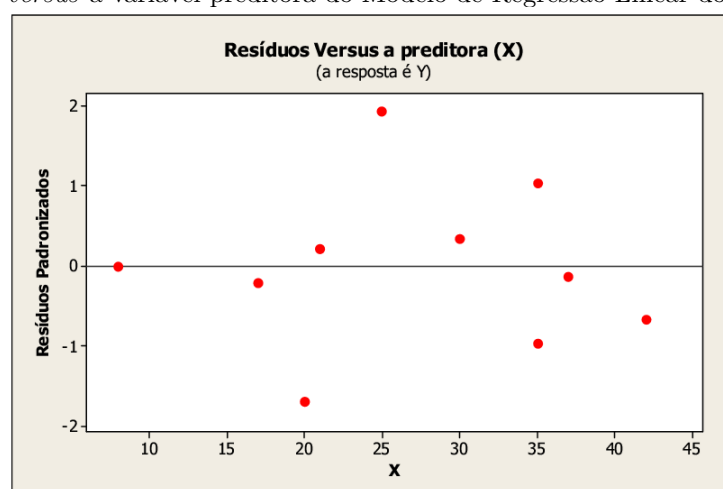
Figura 3.6 Resíduos *versus* os valores ajustados do Modelo de Regressão Linear dos dados da Tabela (3.1).



Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

Minitab Statistical Software ®17.1.0 (student version) (2026).

Figura 3.7 Resíduos *versus* a variável preditora do Modelo de Regressão Linear dos dados da Tabela (3.1).



Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

Minitab Statistical Software ®17.1.0 (student version) (2026).

Conclusão: Portanto, diante dos resultados obtidos e análises realizadas durante o diagnóstico do modelo de regressão linear simples ajustado aos dados da Tabela (3.1), se pode aceitar que o modelo atende as exigências e pressupostos estabelecidos na literatura científica, quanto ao diagnóstico de um modelo de regressão, com relação a: Normalidade, Independência e Homocedasticidade dos resíduos.

3.8 - Lista de Exercícios

1. Mediante as informações fornecidas na Tabela (3.6), determinar os itens a seguir.
- (a) Encontrar as estimativas dos parâmetros para o modelo de regressão linear simples.

(b) Admitindo um erro tipo I de 2%, formular as hipóteses estatísticas para o teste de significância dos parâmetros, a partir dos resultados encontrados no item a). Qual a sua conclusão sobre os resultados obtidos nos testes de hipóteses? É possível afirmar que há significância estatística ao nível de 2% para os testes realizados? Justifique a sua resposta.

(c) Realizar o diagnóstico do modelo de regressão ajustado. Os resíduos do modelo (item b) satisfazem os pressupostos? O modelo de regressão ajustado é válido para prever a variável resposta? Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, qual será o valor de Y para $X = 120$.

Tabela 3.6 - Registros de Ocorrências de Feminicídios no Estado do Pará, no período de 2015 a 2023.

Ano Mês/Variável	2015		2016		2017		2018		2019		2020		2021		2022		2023	
	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X
Jan	0	1	9	13	1	25	7	37	1	49	5	61	14	73	10	85	2	97
Fev	0	2	5	14	2	26	6	38	2	50	12	62	3	74	3	86	6	98
Mar	2	3	1	15	5	27	4	39	4	51	5	63	5	75	4	87	5	99
Abr	1	4	6	16	3	28	3	40	1	52	5	64	4	76	6	88	4	100
Mai	1	5	5	17	5	29	5	41	3	53	4	65	5	77	2	89	7	101
Jun	0	6	7	18	1	30	4	42	7	54	5	66	3	78	4	90	8	102
Jul	2	7	7	19	5	31	7	43	7	55	9	67	4	79	9	91	2	103
Ago	4	8	1	20	5	32	8	44	2	56	9	68	4	80	6	92	5	104
Set	1	9	3	21	5	33	10	45	6	57	3	69	5	81	1	93	5	105
Out	4	10	3	22	1	34	5	46	6	58	2	70	8	82	3	94	3	106
Nov	6	11	2	23	8	35	5	47	3	59	3	71	7	83	2	95	6	107
Dez	8	12	2	24	8	36	5	48	5	60	5	72	5	84	4	96	4	108

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados da SEGUP/Pará (2024).

2. Mediante as informações fornecidas na Tabela (3.7), determinar os itens a seguir.
- (a) Encontrar as estimativas dos parâmetros para o modelo de regressão linear simples.
 - (b) Admitindo um erro tipo I de 1%, formular as hipóteses estatísticas para o teste de significância dos parâmetros, a partir dos resultados encontrados no item a). Qual a sua conclusão sobre os resultados obtidos nos testes de hipóteses? É possível afirmar que há significância estatística ao nível de 1% para os testes realizados? Justifique a sua resposta.
 - (c) Realizar o diagnóstico do modelo de regressão ajustado. Os resíduos do modelo encontrado satisfazem os pressupostos? O modelo de regressão ajustado é válido para prever a variável dependente? Justifique a sua resposta. Em caso afirmativo, qual a Produção se $X = 100$?

Tabela 3.7 - Quantidade de Nitrogênio (X) Observada em relação a Produção (Y) Obtida no Ano de 2003, em uma Indústria de um Município Hipotético, Estado do Pará.

Variável/Local	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X	70	97	53	64	95	64	50	70	94	69	51
Y	86	115	90	86	110	91	99	96	99	104	96

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

3. Os gestores de uma instituição de ensino desejam prever o número de discentes matriculados após o próximo processo seletivo, neste sentido, coletaram dados e definiram a variável Y que representa a quantidade de matrículas efetivadas em função de X o número de alunos(as) que desistiram do curso escolhido após serem aprovados, como pode ser observado na Tabela (3.8).
- (a) Encontrar as estimativas dos parâmetros para o modelo de regressão linear simples.
 - (b) Admitindo um erro tipo I de 5%, formular as hipóteses estatísticas para o teste de significância dos parâmetros, a partir dos resultados encontrados no item a). Qual a sua conclusão sobre os resultados obtidos nos testes de hipóteses? É possível afirmar que há significância estatística ao nível de 5% para os testes realizados? Justifique a sua resposta.
 - (c) Realizar o diagnóstico do modelo de regressão ajustado. Os resíduos do modelo (item b) satisfazem os pressupostos? O modelo de regressão ajustado é válido para prever a variável resposta? Justifique sua resposta. Ainda, em caso afirmativo, qual o valor de Y se $X = 10$?

Tabela 3.8 Quantidade de matrículas efetivadas (Y) em relação ao Número de desistências (X).

Y	64	71	54	81	93	76	77	95	109
X	1	4	5	9	13	11	23	23	28

Fonte: Snedecor, G. W. & Cochran, W. G. (1967). *Statistical Methods*. The Iowa State Press University. pag. 139.

4. A partir das informações disponíveis na Tabela (3.9), determinar os itens a seguir.
- (a) Encontrar as estimativas dos parâmetros para o modelo de regressão linear simples.
 - (b) Admitindo um erro tipo I de 10%, formular as hipóteses estatísticas para o teste de significância dos parâmetros, a partir dos resultados encontrados no item a). Qual a sua conclusão sobre os resultados obtidos nos testes de hipóteses? É possível afirmar que há significância estatística ao nível de 10% para os testes realizados? Justifique a sua resposta.
 - (c) Realizar o diagnóstico do modelo de regressão ajustado. Os resíduos do modelo encontrado satisfazem os pressupostos? O modelo de regressão ajustado é válido para prever a variável dependente? Justifique a sua resposta. Caso o modelo de regressão seja considerado válido, qual será a densidade aparente se o peso for igual a 1.009 kg?

Tabela 3.9 - Peso (X) em relação a Densidade Aparente (Y) de um Eletrodo Produzido no Ano de 2003, em uma Indústria Localizada num Município Hipotético, Estado do Pará.

Variável/Local	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X (em kg)	976	1.004	973	982	973	975	993	974	976
Y (em g/cm ³)	1,623	1,685	1,611	1,659	1,611	1,623	1,676	1,612	1,625
Variável/Local	10	11	12	13	14	15	16	17	18
X (em kg)	1.000	977	989	995	984	985	979	1.001	980
Y (em g/cm ³)	1,683	1,613	1,645	1,677	1,643	1,626	1,619	1,655	1,621

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Carvalho Jr. (2006).

5. Deseja-se acompanhar os parâmetros nutricionais de discentes matriculados em uma instituição de ensino. Para que isso fosse possível selecionaram aleatoriamente 10 (dez) discentes como observado na Tabela (3.10), onde foram aferidos o peso médio em quilogramas (X) dos discentes, em função da quantidade de alimentos consumidos (Y) em gramas, durante as refeições realizadas pelos discentes num período de permanência mínima igual a 8 horas na instituição de ensino.
- (a) Encontrar as estimativas dos parâmetros para o modelo de regressão linear simples.
 - (b) Admitindo um erro tipo I de 1%, formular as hipóteses estatísticas para o teste de significância dos parâmetros, a partir dos resultados encontrados no item a). Qual a sua conclusão sobre os resultados obtidos nos testes de hipóteses? É possível afirmar que há significância estatística ao nível de 1% para os testes realizados? Justifique a sua resposta.

- (c) Realizar o diagnóstico do modelo de regressão ajustado. Os resíduos do modelo encontrado satisfazem os pressupostos? O modelo de regressão ajustado é válido para prever a variável dependente? Justifique a sua resposta. Caso o modelo de regressão seja considerado válido, qual será a densidade aparente se o peso for igual a 1.009 kg?

Tabela 3.10 - Consumo de alimentos (Y) em relação ao Peso médio (X).

Amostras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	46	51	48	44	59	47	51	52	49	51
Y	871	931	898	914	995	921	955	993	934	944

Fonte: Steel, R. G. D. & Torrie, J. H. (1980). *Principles and Procedures of Statistics*. A Biometrical Approach. MacGraw-Hill. pag. 240.

6. Os dados apresentados na Tabela (3.11), se referem a um experimento que registrou a concentração de CO_2 (X) aplicada sobre folhas de trigo a uma temperatura de $35^\circ C$, em função das quantidades de CO_2 ($Y, cm^3/dm^2/hora$) absorvidas pelas folhas, em auxílio ao desenvolvimento e implementação de metas com vistas a redução industrial e inventário de gases do efeito estufa.

Tabela 3.11 - Quantidades de CO_2 (Y) em relação a Concentração de CO_2 (X).

Amostras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X	75	100	100	120	130	130	160	190	200	240	250
Y	0,00	0,65	0,50	1,00	0,95	1,30	1,80	2,80	2,50	4,30	4,50

Fonte: Mead, R. & Curnow, R. N. (1980). *Statistical Methods in Agriculture and Experimental Biology*. Chapman & Hall. pag. 134.

- (a) Encontrar as estimativas dos parâmetros para o modelo de regressão linear simples.
- (b) Admitindo um erro tipo I de 4%, formular as hipóteses estatísticas para o teste de significância dos parâmetros, a partir dos resultados encontrados no item a). Qual a sua conclusão sobre os resultados obtidos nos testes de hipóteses? É possível afirmar que há significância estatística ao nível de 4% para os testes realizados? Justifique a sua resposta.
- (c) Realizar o diagnóstico do modelo de regressão ajustado. Os resíduos do modelo encontrado satisfazem os pressupostos? O modelo de regressão é válido para prever Y ? Justifique sua resposta. Caso o modelo de regressão seja válido, qual será o valor de Y quando $X = 150$?

7. Uma instituição de ensino superior deseja realizar um processo seletivo para compor uma turma de Pós-Doutorado acadêmico. Como forma de incentivo e reconhecimento à publicação científica dos futuros candidatos, esta instituição irá ofertar bolsas de estudo para os candidatos com mais artigos científicos publicados. Os dados da Tabela (3.12), se referem ao número de bolsas de estudos concedidas em processos seletivos anteriores, em função do número de artigos científicos publicados em revistas científicas pelos candidatos que foram selecionados nos referidos processos.

Tabela 3.12 - Número de bolsas de estudo concedidas (Y) em relação ao Número de Artigos publicados (X).

Nº de bolsas concedidas	37	34	52	26	32	25	55	65	44	25	45	26	29	30
Nº de Artigos publicados	39	29	46	28	31	25	49	57	51	21	42	38	34	47

Fonte: Elaborado pelo autor, adaptado de Steel, R. G. D. & Torrie, J. H. (1980). *Principles and Procedures of Statistics*. A Biometrical Approach. MacGraw-Hill. pag. 277.

- (a) Encontrar as estimativas dos parâmetros para o modelo de regressão linear simples.
- (b) Admitindo um erro tipo I de 2%, formular as hipóteses estatísticas para o teste de significância dos parâmetros, a partir dos resultados encontrados no item a). Qual a sua conclusão sobre os resultados obtidos nos testes de hipóteses? É possível afirmar que há significância estatística ao nível de 2% para os testes realizados? Justifique a sua resposta.
- (c) Realizar o diagnóstico do modelo de regressão ajustado. Os resíduos do modelo encontrado satisfazem os pressupostos? O modelo de regressão é válido para prever Y ? Justifique sua resposta. Caso o modelo de regressão seja válido, qual será o valor de Y quando $X = 60$?
8. Os dados da Tabela (3.13), se referem a um experimento de irrigação de batata plantada em terra roxa estruturada (solo argiloso) em que foram medidas as Lâminas (L, mm) de água a diferentes distâncias do aspersor e as correspondentes Produtividades ($P, t/ha$).

Observação 3.8.1. Em geral, nesse tipo de solo o excesso de água causa diminuição na produção.

Tabela 3.13 - Produção de Batatas (P) em relação a Distância medida entre as Lâminas (L)

L	285	380	400	425	455	490	520	550	575	615	680	780
P	14,94	15,98	21,21	22,71	22,38	24,83	24,42	30,59	29,96	31,07	29,80	22,61

Fonte: Duarte, N. S. (1989). *Efeitos do Horário e da Lâmina de Irrigação na Cultura de Batata (*Solanum Tuberosum* L.)* Dissertação (Mestrado) Escola Superior de Agricultura. "Luís de Queiroz".

- (a) Encontrar as estimativas dos parâmetros para o modelo de regressão linear simples.

- (b) Admitindo um erro tipo I de 1%, formular as hipóteses estatísticas para o teste de significância dos parâmetros, a partir dos resultados encontrados no item a). Qual a sua conclusão sobre os resultados obtidos nos testes de hipóteses? É possível afirmar que há significância estatística ao nível de 1% para os testes realizados? Justifique a sua resposta.
- (c) Realizar o diagnóstico do modelo de regressão ajustado. Os resíduos do modelo encontrado satisfazem os pressupostos? O modelo de regressão é válido para prever Y ? Justifique sua resposta. Caso o modelo de regressão seja válido, qual será a produção de Batatas (P) quando a distância medida entre as lâminas (L) for igual a 800mm?
9. Um grupo de pesquisadores com o intuito de auxiliar o planejamento financeiro de famílias coletou numa região os dados apresentados na Tabela (3.14), os quais correspondem às variáveis: renda familiar (X) *versus* gasto com alimentação (Y) em salários-mínimos, numa amostra de dez famílias selecionadas aleatoriamente, onde o gasto com alimentação foi calculado somando o total que cada membro das famílias gastou em 1 mês com alimentação.

Tabela 3.14 - Total gasto com alimentação (Y) em relação a renda (X) de dez famílias.

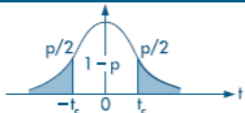
Família	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	3	5	10	20	30	50	70	100	150	200
Y	1,50	2,00	6,00	10,00	15,00	20,00	25,00	40,00	60,00	80,00

Fonte: Elaborado pelo Autor, a partir dos dados de Bussab & Morettin (2024).

- (a) Encontrar as estimativas dos parâmetros para o modelo de regressão linear simples.
- (b) Admitindo um erro tipo I de 5%, formular as hipóteses estatísticas para o teste de significância dos parâmetros, a partir dos resultados encontrados no item a). Qual a sua conclusão sobre os resultados obtidos nos testes de hipóteses? É possível afirmar que há significância estatística ao nível de 5% para os testes realizados? Justifique a sua resposta.
- (c) Realizar o diagnóstico do modelo de regressão ajustado. Os resíduos do modelo encontrado no item a) satisfazem os pressupostos estabelecidos para a metodologia de modelos de regressão e correlação? O modelo de regressão é válido para prever o gasto com alimentação de uma família? Justifique sua resposta.
- (d) Caso o modelo de regressão encontrado no item a) seja considerado estatisticamente válido, qual será o gasto com alimentação se uma família possuir uma renda de 15 salários-mínimos?

3.9 - Tabela da Distribuição t-Student e Tabelas de Durbin-Watson

3.9.1 - Tabela da Função Densidade de Probabilidade *t-Student*Figura 3.8 - Tabela de Valores Críticos, Graus de Confiança e Graus de Liberdade da Função Densidade de Probabilidade *t-Student*.

Graus de liberdade v	<div><div>Tabela V — Distribuição t de Student</div><div>Corpo da tabela dá os valores t_c tais que $P(-t_c < t < t_c) = 1 - p$. Para $v > 120$, usar a aproximação normal.</div><div></div></div>															Graus de liberdade v
	p = 90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%	
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	15,894	31,821	63,657	318,309	636,619	1
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925	22,327	31,598	2
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841	10,214	12,924	3
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	2,998	3,747	4,604	7,173	8,610	4
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	2,756	3,365	4,032	5,893	6,869	5
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707	5,208	5,959	6
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499	4,785	5,408	7
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355	4,501	5,041	8
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250	4,297	4,781	9
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169	4,144	4,587	10
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106	4,025	4,437	11
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055	3,930	4,318	12
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012	3,852	4,221	13
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977	3,787	4,140	14
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,248	2,602	2,947	3,733	4,073	15
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921	3,686	4,015	16
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898	3,646	3,965	17
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878	3,610	3,922	18
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861	3,579	3,883	19
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845	3,552	3,850	20
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831	3,527	3,819	21
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819	3,505	3,792	22
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807	3,485	3,768	23
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797	3,467	3,745	24
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,166	2,485	2,787	3,450	3,725	25
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779	3,435	3,707	26
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771	3,421	3,690	27
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,684	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763	3,408	3,674	28
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756	3,396	3,659	29
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750	3,385	3,646	30
35	0,126	0,255	0,388	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	2,030	2,133	2,438	2,724	3,340	3,591	35
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704	3,307	3,551	40
50	0,126	0,254	0,387	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678	3,261	3,496	50
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660	3,232	3,460	60
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,076	2,358	2,617	3,160	3,373	120
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291	∞
	p = 90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%	

Fonte: Bussab e Morettin (2024).

3.9.2 - Tabelas da Estatística de Teste d de *Durbin-Watson*Figura 3.9 - Tabela da Estatística de Teste d de Durbin-Watson com Nível de Significância a 1%.

$\alpha = .01$										
	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0.39	1.14								
7	0.44	1.04	0.29	1.68						
8	0.5	1	0.35	1.49	0.23	2.1				
9	0.55	1	0.41	1.39	0.28	1.88	0.18	2.43		
10	0.6	1	0.47	1.33	0.34	1.73	0.23	2.19	0.15	2.69
11	0.65	1.01	0.52	1.3	0.4	1.64	0.29	2.03	0.19	2.45
12	0.7	1.02	0.57	1.27	0.45	1.58	0.34	1.91	0.24	2.28
13	0.74	1.04	0.62	1.26	0.5	1.53	0.39	1.83	0.29	2.15
14	0.78	1.05	0.66	1.25	0.55	1.49	0.44	1.76	0.34	2.05
15	0.81	1.07	0.7	1.25	0.59	1.46	0.49	1.7	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.9
17	0.87	1.1	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.3	0.48	1.85
18	0.9	1.12	0.8	1.26	0.71	1.42	0.61	1.6	0.52	1.8
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.6	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.8	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1	1.17	0.91	1.28	0.83	1.4	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.4	0.77	1.53	0.7	1.67
24	1.04	1.2	0.96	1.3	0.88	1.41	0.8	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.3	0.9	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.1	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.9	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.9	1.6
32	1.16	1.28	1.1	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.6
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.3	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.27	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.1	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
46	1.25	1.34	1.2	1.4	1.15	1.46	1.1	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.2	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.4	1.28	1.45	1.24	1.49	1.2	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.6
65	1.41	1.47	1.38	1.5	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.4	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.5	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.6	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.6	1.39	1.63
90	1.5	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.6	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.5	1.58	1.48	1.6	1.46	1.63	1.44	1.65
150	1.61	1.64	1.6	1.65	1.58	1.67	1.57	1.68	1.56	1.69
200	1.66	1.68	1.65	1.69	1.64	1.7	1.63	1.72	1.62	1.73

Fonte: <https://www.statology.org/wp-content/uploads/2019/01/durbinWatson1.jpg> Acesso em 02/06/2026.

Figura 3.10 - Tabela da Estatística de Teste d de Durbin-Watson com Nível de Significância a 5% e $1 < k < 5$.

$\alpha = .05$										
	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0.61	1.4								
7	0.7	1.36	0.47	1.9						
8	0.76	1.33	0.56	1.78	0.37	2.29				
9	0.82	1.32	0.63	1.7	0.46	2.13	0.3	2.59		
10	0.88	1.32	0.7	1.64	0.53	2.02	0.38	2.41	0.24	2.82
11	0.93	1.32	0.66	1.6	0.6	1.93	0.44	2.28	0.32	2.65
12	0.97	1.33	0.81	1.58	0.66	1.86	0.51	2.18	0.38	2.51
13	1.01	1.34	0.86	1.56	0.72	1.82	0.57	2.09	0.45	2.39
14	1.05	1.35	0.91	1.55	0.77	1.78	0.63	2.03	0.51	2.3
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.1	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.9	1.71	0.78	1.9	0.67	2.1
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.92	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.4	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.2	1.41	1.1	1.54	1	1.68	0.9	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.8	0.96	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.9	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.1	1.66	1.01	1.78	0.93	1.9
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.3	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.1	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.2	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.5	1.3	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.5	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.4	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.8
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.8
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.8
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.6	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.6	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.5	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.6	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.5	1.7	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.7	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.6	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.6	1.7	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.7	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.6	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78
150	1.72	1.75	1.71	1.76	1.69	1.77	1.68	1.79	1.66	1.8
200	1.76	1.78	1.75	1.79	1.74	1.8	1.73	1.81	1.72	1.82

Fonte: <https://www.statology.org/wp-content/uploads/2019/01/durbinWatson1.jpg> Acesso em 02/06/2026.

Figura 3.11 - Tabela da Estatística de Teste d de Durbin-Watson com Nível de Significância a 5% e $6 < k < 10$.

$\alpha = .05$										
	k = 6		k = 7		k = 8		k = 9		k = 10	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
11	0.2	3.01								
12	0.27	2.83	0.17	3.15						
13	0.33	2.7	0.23	2.99	0.15	3.27				
14	0.39	2.57	0.29	2.85	0.2	3.11	0.13	3.36		
15	0.45	2.47	0.34	2.73	0.25	2.98	0.18	3.22	0.11	3.44
16	0.5	2.39	0.4	2.62	0.3	2.86	0.22	3.09	0.16	3.3
17	0.55	2.32	0.45	2.54	0.36	2.76	0.27	2.98	0.2	3.18
18	0.6	2.26	0.5	2.47	0.41	2.67	0.32	2.87	0.24	3.07
19	0.65	2.21	0.55	2.4	0.46	2.59	0.37	2.78	0.29	2.97
20	0.69	2.16	0.6	2.34	0.5	2.52	0.42	2.7	0.34	2.89
21	0.73	2.12	0.64	2.3	0.55	2.46	0.46	2.63	0.38	2.81
22	0.77	2.09	0.68	2.25	0.59	2.41	0.51	2.57	0.42	2.73
23	0.8	2.06	0.72	2.21	0.63	2.36	0.55	2.51	0.47	2.67
24	0.84	2.04	0.75	2.17	0.67	2.32	0.58	2.46	0.51	2.61
25	0.87	2.01	0.78	2.14	0.7	2.28	0.62	2.42	0.54	2.56
26	0.9	1.99	0.82	2.12	0.74	2.24	0.66	2.38	0.58	2.51
27	0.93	1.97	0.85	2.09	0.77	2.22	0.69	2.34	0.62	2.47
28	0.95	1.96	0.87	2.07	0.8	2.19	0.72	2.31	0.65	2.43
29	0.98	1.94	0.9	2.05	0.83	2.16	0.75	2.28	0.68	2.4
30	1	1.93	0.93	2.03	0.85	2.14	0.78	2.25	0.71	2.36
31	1.02	1.92	0.95	2.02	0.88	2.12	0.81	2.23	0.74	2.33
32	1.04	1.91	0.97	2	0.9	2.1	0.84	2.2	0.77	2.31
33	1.06	1.9	0.99	1.99	0.93	2.09	0.86	2.18	0.8	2.28
34	1.08	1.89	1.02	1.98	0.95	2.07	0.89	2.16	0.82	2.26
35	1.1	1.88	1.03	1.97	0.97	2.05	0.91	2.14	0.85	2.24
36	1.11	1.88	1.05	1.96	0.99	2.04	0.93	2.13	0.87	2.22
37	1.13	1.87	1.07	1.95	1.01	2.03	0.95	2.11	0.89	2.2
38	1.5	1.86	1.09	1.94	1.03	2.02	0.97	2.1	0.91	2.18
39	1.16	1.86	1.1	1.93	1.05	2.01	0.99	2.09	0.93	2.16
40	1.18	1.85	1.12	1.92	1.06	2	1.01	2.07	0.95	2.15
45	1.24	1.84	1.19	1.9	1.14	1.96	1.09	2.02	1.04	2.09
50	1.29	1.82	1.25	1.88	1.2	1.93	1.16	1.99	1.11	2.04
55	1.33	1.81	1.29	1.86	1.25	1.91	1.21	1.96	1.17	2.01
60	1.37	1.81	1.34	1.85	1.3	1.89	1.26	1.94	1.22	1.98
65	1.4	1.81	1.37	1.84	1.34	1.88	1.3	1.92	1.27	1.96
70	1.43	1.8	1.4	1.84	1.37	1.87	1.34	1.91	1.31	1.95
75	1.46	1.8	1.43	1.83	1.4	1.87	1.37	1.9	1.34	1.94
80	1.48	1.8	1.45	1.83	1.43	1.86	1.4	1.89	1.37	1.93
85	1.5	1.8	1.47	1.83	1.49	1.86	1.42	1.89	1.4	1.92
90	1.52	1.8	1.49	1.83	1.47	1.85	1.45	1.88	1.42	1.91
95	1.54	1.8	1.51	1.83	1.49	1.85	1.46	1.88	1.44	1.9
100	1.55	1.8	1.53	1.83	1.5	1.85	1.48	1.87	1.46	1.9
150	1.65	1.82	1.64	1.83	1.62	1.85	1.6	1.86	1.59	1.88
200	1.71	1.83	1.7	1.84	1.69	1.85	1.68	1.86	1.67	1.87

Fonte: <https://www.statology.org/wp-content/uploads/2019/01/durbinWatson1.jpg> Acesso em 02/06/2026.

Bibliografia

- BARBETTA, P. A.; REIS, M. M.; BORNIA, A. C. Estatística para Cursos de Engenharia, Computação e Ciência de Dados. Rio de Janeiro: LTC, 2024. Ebook. ISBN 9788521638827. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521638827>
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. Introdução à Inferência Estatística. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2001.
- BICKEL, P. J. E DOKSUM, K. A. Mathematical Statistics. USA: Holden-Day, 1977.
- CARVALHO Jr. J. G. Gráfico de Controle de Regressão Estrutural, Dissertação de Mestrado: UFPA, Belém, 2006.
- BUSSAB, W. O., MORETTIN, P. A. Estatística Básica. 10^a ed., São Paulo: Saraiva Uni, 2024.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. Inferência Estatística. 2^a Ed. CENGAGE LEARNIN, 2010.
- COLOSIMO, E. A. Estatística II: Correlação e Regressão Linear Simples. Departamento de Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: https://www.est.ufmg.br/~enricoc/pdf/EstatisticaII/aula9-10_corr-reg.pdf. Acesso em 24/04/2026.
- CHARNET, R.; FREIRE, C. A. L.; CHARNET, E. M. R.; BONVINO, H. Análise de modelos de regressão linear com aplicações. São Paulo: Editora Unicamp, 2008.
- DRAPER, N. R., SMITH, H., Applied Regression Analysis, 2a. ed., New York: John Wiley, 1998.
- HAIR, JR., J. F., ANDERSON, R. E., TATHAM, R. L., BLACK, W. Análise Multivariada de Dados. 6^a ed., São Paulo: Bookman, 2009.
- HOFFMANN, R. Análise de regressão: uma introdução à econometria [recurso eletrônico] / Rodolfo Hoffmann. Piracicaba: ESALQ/USP, 2015. Disponível em: <https://repositorio.usp.br/bitstream/handle/BDPI/48616/REGRESS.pdf?sequence>. Acesso em 19/05/2026.
- KUTNER, M. H.; NACHTSHEIM, C. J.; NETER, J.; LI, W. Applied linear statistical models. 5. ed. India: McGraw-Hill, 2013.
- MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G. Introduction to linear regression analysis. 6th ed. Hoboken, N.J.: Wiley, 2021.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. Introduction to the Theory of Statistical. Singapore: McGraw Hill. 1974.
- NETER, J., WASSERMAN, W. e KUTNER, M. H. Applied linear regression models, Richard D. Irwin Inc, Homewood, Illinois, 1983.
- PIANEZZER, G. A. Regressões estatísticas: definição, métodos e aplicação prática. 1^a ed., Curitiba: InterSaberes, 2025.